TD Maple : recherche des triangles rectangles pseudo-isocèles

- Nous nous proposons de déterminer les *triangles rectangles pseudo-isocèles*. Il s'agit de triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont a et $a+1$, et l'hypoténuse est b, où a et b sont naturels. L'exemple le plus classique est obtenu avec $a = 3$ et $b = 5$.

- La première méthode va consister à tester, pour chaque valeur de a, si $a^2 + (a+1)^2$ est un carré parfait.

Q1 Utilisez les fonctions `sqrt` et `floor` pour calculer la racine carrée entière d'un naturel n.

Q2 Rédigez une fonction `carré_parfait` qui rend la valeur `true` ou `false` selon que son argument est ou non un carré parfait.

- En Maple, une liste est construite en plaçant entre crochets la suite de ses termes ; exemple : `[8,1,33,9,1]`. Un élément peut apparaître plusieurs fois dans une liste ; l'ordre d'énumération est conservé par Maple. Une liste de longueur n n'est finalement qu'un n-uplet !

Q3 Consultez rapidement l'aide sur `list`.

Q4 Consultez l'aide sur `select` pour savoir comment « filtrer » une liste, c'est-à-dire éliminer d'une liste les éléments qui ne satisfont pas un prédicat donné.

Q5 Utilisez `seq`, `select` et `isprime` pour obtenir la liste des nombres premiers compris inférieurs à 100.

Q6 Utilisez `seq` et `select` pour obtenir la liste des triangles rectangles pseudo-isocèles pour lesquels a est au plus égal à $a_{\max} = 10000$.

Q7 Consultez l'aide sur `time` et mesurez le temps requis par la méthode que vous venez de mettre en œuvre.

- La méthode précédente présente un inconvénient : en construisant explicitement la liste des « candidats » à tester, elle monopolise un espace mémoire important ; il n'est pas envisageable de l'utiliser dès que n est de l'ordre de 10^6.

Q8 Consultez l'aide sur `for` pour savoir comment programmer une « boucle ». À titre d'exemple, programmez l'affichage des carrés des naturels de 1 à 10 (sans avoir recours à `seq`).

Q9 Programmez l'affichage de la liste des triangles rectangles pseudo-isocèles pour lesquels a est au plus égal à $a_{\max} = 10000$, en utilisant une boucle `for`.

Q10 Comparez les temps de calcul des deux méthodes, pour diverses valeurs de $a_{\max}$.

Q11 Quelles sont les valeurs possibles du chiffre des unités de b^2 ? Quelles sont les valeurs possibles du chiffre des unités de $a^2 + (a+1)^2$?

Q12 En déduire une astuce très simple, économisant 20 % des calculs. Mettez en œuvre cette astuce.

- Les méthodes précédentes reposent sur l'examen des valeurs possibles de a. Il est beaucoup plus efficace de s'appuyer sur le fait que le membre de droite est un carré parfait, comme on va le voir.

Q13 Montrez que, dans un triangle rectangle pseudo-isocèle, $a = \left\lfloor \sqrt{\dfrac{b}{2}} \right\rfloor$.

Q14 Rédigez une fonction `bien_décomposable` qui rend la valeur `true` ou `false` selon que son argument peut ou non s'écrire $a^2 + (a+1)^2$ avec $a \in \mathbb{N}$.

Q15 Utilisez adroitement `seq`, `select` et `bien_décomposable` pour résoudre notre problème. Remarque : pour déduire la liste des a de la liste des b, utilisez `map`.

Q16 Mettez en œuvre cette idée. Comparez, en termes de coûts, cette méthode et celle suivie à la question 9.

- Vous avez obtenu une liste $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de p « petits côtés » de triangles rectangles pseudo-isocèles.

Q17 Observez la suite des quotients $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$. Quel semble être son comportement ?