Polynômes

Table des matières

▶ Dans tout le texte, les mots *variable*, *indéterminée* et *inconnue* sont synonymes.

Écriture des polynômes

Voici quelques polynômes définis avec Maple :

```
A := X**3-4X^2+X-7 ; B := x**3-7*y+4*z**2 ;
```

Le premier est un polynôme en la variable X, de degré 3 ; le second peut être vu comme un polynôme en x de degré 3, un polynôme en y de degré 1 ou un polynôme en z de degré 2.

La fonction `sort` permet de trier les termes d'un polynôme, selon les degrés décroissants ; ainsi, la commande `sort(3X^2+7-X+X^3)` nous donnera $X^3 + 3X^2 - X + 7$.

La fonction `collect` permet, dans un polynômes à plusieurs variables, de regrouper les termes selon les puissances décroissantes de l'une des variables :

```
P := X-7*Y+X**4-3*X**2*Z+3*X**2 ; collect(P,X);
```

P est un polynôme en trois indéterminées X, Y et Z ; avec la commande `collect(P,X)`, nous obtenons le résultat `X^4+(-3*Z+3)*X^2+X-7*Y`.

La commande `subs` permet de remplacer un nom par une expression ; exemple : le résultat de la commande `subs(x=X**2,x**2+x+1);` est $X^4 + X^2 + 1$.

Multiplication des polynômes

Un polynôme peut aussi être présenté comme produit de facteurs, voire comme somme de produits de facteurs :

```
A := (X-3*(2*X**2+17*X-365) ; B := (X-1)*(X-2)+(4*X-3)*(X**2-5) ;
```

Le développemnt de ces écritures se fait avec `expand` :

```
expand(A) ; expand(B) ; expand(A*B) ;
```

Division euclidienne, PPCM, PGCD

La fonction `divide` permet de savoir si un polynôme A divise un polynôme B :

```
A := x**2-7*X+12 ; B := X-3 ; divide(A,B,X) ;
```

Notez qu'il faut spécifier le nom de la variable, ici X. À la division euclidienne sont associées deux fonctions : `quo` et `rem`. Les syntaxes sont `quo(A,B,X)` et `rem(A,B,X)` ; la première calcule le quotient, la deuxième le reste, dans la division euclidienne de A par B, la variable étant X.

Les fonctions `gcd` et `lcm` permettent le calcul du PGCD et du PPCM de deux polynômes :

```
A = (X-2)*(X-3)*(X-4) ; B := (X-3)*(X**2+1) ; lcm(A,B) ; gcd(A,B) ;
```

Les résultats sont $2X^4 - 13X^2 - X^3 - X - 15$ et $X - 3$.

Petits outils en vrac

`coeff(P,X,n)` permet d'extraire le terme de degré n, dans le polynôme P ; `coeffs` donne *tous* les coefficients de P ; `lcoeff(P)` renvoie le coefficient du terme de plus haut degré (le coefficient dominant) et `tcoeff` donne celui du terme de plus bas degré.

Factorisation

La fonction de factorisation d'un poynôme est `factor` (ne pas confondre avec `ifactor`, qui sert à factoriser des entiers). Par défaut, Maple factorise sur $\mathbb{R}$; par exemple, $X^2 - 7X + 10$ sera factorisé en $(X-2)(X-5)$. Pour factoriser sur $\mathbb{C}$, il faut ajouter l'option `complex` : ainsi, `factor(X^2+2*X+2)` rend comme résultat $X^2+2*X+2$; mais `factor(X^2+2*X+2,complex)` rend comme résultat $(X+1.+1.I)(X+1.-1.I)$.

Polynômes et développements limités

Rappel : la *partie régulière* d'un développement limité est un polynôme en une indéterminée, en général notée x. Exemple : le développement limité de la fonction $x \mapsto \cos(\ln(1-x))$, au voisinage de 0 et à la précision $\mathcal{O}(x^5)$, est donné par la commande `taylor(cos(ln(1-x)),x=0,4);`. Le résultat affiché par Maple est $1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + O(x^4)$. Voici comment extraire la partie régulière :

```
DL := taylor(cos(ln(1-x)),x=0,5) : convert(DL,polynom) ;
```

Fonctions symétriques des racines d'un polynôme

Maple permet de calculer certaines fonctions symétriques des racines d'un polynôme. Voici un exemple : $P = X^3 + X + 1$, on veut calculer la somme des carrés des inverses des racines de P ; ceci a bien un sens, car aucune de ces racines n'est nulle. Voici la commande à utiliser :

```
sum(1/(x*x),x=RootOf(x**3+x+1)) ;
```

Le résultat rendu est 1. Prenez la peine de vérifier ceci à la main : notant a, b et c les racines, nous avons $a + b + c = 0$, $ab + bc + ca = 1$ et $abc = -1$.

Utilisez `seq` pour obtenir la somme des inverses des puissances k-ièmes des racines de votre polynôme. Vous pouvez aussi modifier le degré du polynôme et ses coefficients.

Polynômes de Tchebychev

L'écriture du nom de ce mathémticien est délicate à rendre dans les langues qui ne sont pas basées sur l'alphabet cyrillique.

Les polynômes de Tchebychev jouent un rôle important pour les approximations. Le n-ième polynôme, noté T_n, est défini sur $[-1, 1]$ par la formule $T_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big)$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Vous vérifierez aisément que la fonction T_n est un polynôme de degré n.

Visualisez les dix premiers polynômes de Tchebychev ; conjecturez (sans preuve) quelques propriétés de T_n ; représentez dans une même figure les polynômes T_2, T_3, T_4 et T_5.

Vérifiez également que la famille $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est orthogonale, pour la produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Vous pouvez demander cette vérification à Maple, pour un n fixé : utilisez `seq` et placez les résultats dans une matrice, dont les lignes et colonnes sont indexées de 0 à $n-1$. Que constatez-vous ? Vous pouvez aussi effectuer la vérification par un calcul manuel par très compliqué, si n est petit.

FIN