ENSTIM (323)

▶ Étudiez le comportement au voisinage de $\pm\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1} e^{1/x}$.

ENSAM (292)

▶ Soient a et b deux réels. Justifiez l'existence de

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \big(\ln(t^2+t+1) + a\ln(t^2+2t+3) + b\ln(t^2+t+4)\big)\,dt$$

Déterminez a et b pour que f possède une limite quand x tend vers $+\infty$.

Un exercice autour de la fonction « partie entière »

Q1 Rédigez une fonction `f` qui calcule $f(x)$ pour x donné.

Q2 Tracez la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[-1, 1]$. Consultez au besoin l'aide sur `plot`, et ajoutez quelques éléments décoratifs.

Q3 Quel est le sens de variation de f ? Quelle relation existe-t-il entre $f(x+1)$ et $f(x)$? Quelle est la valeur de $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{Z}$?

Q4 Montrez qu'il existe un relatif k tel que les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 12345$ soient toutes dans l'intervalle $[k, k+1[$. Déterminez rapidement ce relatif (avec l'aide de Maple).

Q5 Tracez la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[k, k+2]$. Consultez l'aide sur `plot` pour faire apparaître la droite d'équation $y = 12345$, puis utilisez les « poignées » pour agrandir la figure.

Q6 Quel est le plus petit réel x tel que $f(x) > f(k)$? Quelles valeurs de $f(x)$ suffit-il de calculer pour résoudre l'équation proposée ?

Q7 Rédigez un script Maple qui calcule ces valeurs et concluez. Indication : consultez l'aide sur `seq`.

Q8 Il serait commode de ne pas avoir à consulter cette liste fastidieuse ; écoutez les explications sur les listes et la fonction `select`, puis rédigez une fonction qui, à $q \in \mathbb{Z}$, associe une description de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = q$. Il vous appartient de donner un sens au mot « description ».

Un exercice

▶ Pour $n \geqslant 1$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k^2}$. Nous admettons que la suite de terme général S_n converge vers $\ell = \pi^2/6$.

▶ Constatez que `sum` ne sait pas donner d'expression simple de S_n ; mais que, si l'on donne une valeur numérique à la place de n, on obtient un résultat numérique.

▶ Calculez S_n pour diverses valeurs de n (par exemple : 10, 100, 1000). Donnez une représentation graphique des résultats obtenus ; pour ce faire, commencez par construire une liste de la forme suivante :
`L := [[10,1.635],[100,1.640],[300,1.641]];`
où, dans chaque couple, la première composante est n et la deuxième est S_n. Ensuite, utilisez :
`plot(L,style=point)`
Constatez la convergence de la suite.

▶ Utilisez `evalf` pour obtenir l'erreur $e_n = \ell - S_n$. Selon vous, e_n est-elle de l'ordre de $1/n^2$ ou $1/n$? Indication : encadrez $1/k^2$ par $1/k/(k+1)$ et $1/k/(k-1)$. La convergence est-elle rapide ? Connaissez-vous une suite qui converge vers 0 beaucoup plus vite que (e_n) ? Et une suite qui converge vers 0 beaucoup plus lentement ?

▶ Utilisez `time` pour estimer le temps de calcul de S_n ; celui-ci est-il proportionnel à n ? Donnez une représentation graphique des résultats obtenus.

▶ Maintenant, fixez la valeur de n et faites varier la valeur de `Digits` : le temps de calcul de S_n est-il proportionnel à `Digits` ou à son carré ? Donnez une représentation graphique des résultats obtenus.