Option Informatique en Spé MP et MP*
Plans projectifs finis

1 Définition, un exemple

Définition 1 Soient X un ensemble fini non vide et $\mathcal{D}$ une famille de parties de X. Nous dirons que $(X, \mathcal{D})$ est un *plan projectif fini* si les trois axiomes suivants sont satisfaits :

P1 il existe une partie F de X, de cardinal 4, telle que $|F \cap D| \leqslant 2$ pour tout $D \in \mathcal{D}$;

P2 si D_1 et D_2 sont deux éléments distincts de $\mathcal{D}$, alors $|D_1 \cap D_2| = 1$;

P3 si x_1 et x_2 sont deux éléments distincts de X, alors il existe un et un seul $D \in \mathcal{D}$ tel que $\{x_1, x_2\} \subset D$.

Question — Quel qualificatif attribueriez-vous à F ?

Soit $\mathcal{P} = (X, \mathcal{D})$ un plan projectif fini ; les *points* de $\mathcal{P}$ sont les éléments de X ; les *droites* de $\mathcal{P}$ sont les éléments de $\mathcal{D}$. Nous dirons que «la droite D passe par le point x» lorsque $x \in D$. L'unique droite passant par deux points distincts x_1 et x_2 sera notée $\overline{x_1 x_2}$. L'*intersection* de deux droites D et D' distinctes est l'unique point de $D \cap D'$.

Donnons un exemple : le plan de FANO comporte sept points (numérotés de 1 à 7) et sept droites (étiquetées de a à g). Une représentation de ce plan apparaît à la figure 1 ; notez que la septième droite est la courbe passant par les milieux des côtés du triangle.

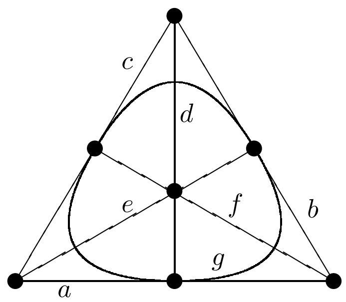

Figure 1: le plan de Fano

Suggestion : montrez que l'axiome P3 est indépendant des axiomes P1 et P2. Pour ce faire, vous devez exhiber un couple $(X, \mathcal{D})$ vérifiant P1 et P2 mais pas P3. Vous pouvez démontrer de même que P1 est indépendant de P2 et P3, puis que P2 est indépendant de P1 et P3.

2 Propriétés

Théorème 1 Soit x un point. Il existe une droite ne passant pas par x.

Preuve Soit F la partie dont l'existence est assurée par P1 ; il existe dans F au moins trois points a, b et c distincts de x. Alors l'une au moins des droites $\overline{ab}$ et $\overline{ac}$ ne passe pas par x.

Théorème 2 Soient D et D' deux droites distinctes ; il existe un point z qui n'est sur aucucune de ces deux droites.

Preuve Soit F l'ensemble dont l'existence est affirmée par P1. Nous avons $|D \cap F| \leqslant 2$ et $|D' \cap F| \leqslant 2$. Si F n'est pas contenu dans $D \cup D'$, c'est fini. Sinon, D coupe F en deux points a et b, et D' coupe F en les deux autres points c et d. Les droites $D_1 = \overline{ac}$ et $D_2 = \overline{bd}$ se coupent en z. Montrons que z n'appartient ni à D, ni à D'. Il suffit de prouver que $z \notin D$, ce que nous ferons par l'absurde. Si $z \in D$, alors $z = a$ puisque D et D_1 ne se coupent qu'en un point. Mais alors D_2 contient a, b et d qui sont trois points de F : ceci contredit P1.

Suggestion : faites un dessin !

Théorème 3 Toutes les droites d'un plan projectif fini ont le même cardinal.
Preuve Soient D et D' deux droites. Fixons $z \notin (D \cup D')$. Définissons φ qui, à $x \in D$, associe le point d'intersection de $\overline{zx}$ et D'. L'existence de ce point est assurée par P2 et P3. Montrons que φ est bijective. Soit $y \in D'$; la droite $\overline{zy}$ recoupe D en x ; alors $\overline{zy} = \overline{zx}$ donc $y = \varphi(x)$.
Suggestion : faites un dessin !

3 Dual d'un plan projectif fini

Définition 2 Soit $\mathcal{P} = (X, \mathcal{D})$ un plan projectif fini. Considérons le graphe dont l'ensemble des sommets est $X \cup \mathcal{D}$; les arêtes sont les couples $(x, D) \in X \times \mathcal{D}$ tels que $x \in D$. Notez que ce graphe est *biparti*. La figure 2 représente le graphe associé au plan de FANO.

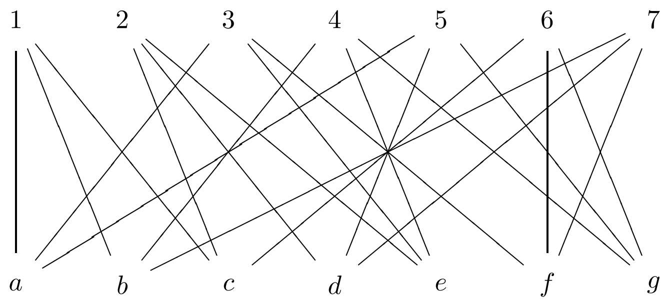

Figure 2: le graphe associé au plan de Fano

À chaque point x, associons l'ensemble $\hat{x}$ des droites qui passent par x ; notons $\widehat{X} = \{\hat{x} | x \in X\}$. Le *dual* de $\mathcal{P}$ est le couple $(\mathcal{D}, \widehat{X})$.
Théorème 4 Le *dual* d'un plan projectif fini est lui-même un plan projectif fini.
Preuve Nous allons vérifier que $(\mathcal{D}, \widehat{X})$ satisfait les trois axiomes P1, P2 et P3.
• Soit $F = \{a, b, c, d\}$ la partie dont l'existence est assurée par P1. Notons $D_1 = \overline{ab}$, $D_2 = \overline{cd}$, $D_3 = \overline{ad}$ et $D_4 = \overline{bc}$. Un peu de réflexion montre que, quelle que soit la façon dont nous choisissons trois de ces droites, il en existe deux qui se coupent en un point n'appartenant pas à la troisième. Donc trois quelconques des quatre droites ont toujours une intersection vide.
• La condition P2 pour le dual n'est autre que la condition P3 pour $(X, \mathcal{D})$.
• De même, la condition P3 pour le dual est la condition P2 pour $(X, \mathcal{D})$.

4 Un peu de combinatoire

Définition 3 Le théorème 3 nous permet de définir l'*ordre* d'un plan projectif fini $\mathcal{P}$: c'est le nombre $|D| - 1$, où D est l'une des droites de $\mathcal{P}$.
Théorème 5 Soit $\mathcal{P} = (X, \mathcal{D})$ un plan projectif d'ordre n ; nous avons :

- par tout point de X, il passe exactement $n + 1$ droites ;
- $|X| = n^2 + n + 1$;
- $|\mathcal{D}| = n^2 + n + 1$.

Preuve • Soit $x \in X$. La théorème 1 affirme l'existence d'une droite D ne passant pas par x. La fonction qui à chaque point y de D associe la droite $\overline{xy}$ est clairement bijective.
• Soient $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ une droite et $a \notin D$. Notons $D_i = \overline{ax_i}$. D'après P2, deux droites D_i et D_j distinctes se coupent en un seul point, qui est donc a. Chaque droite D_i contient n points, en plus de a ; ceci nous donne un total de $(n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1$ points. Il reste à prouver qu'il n'y en a pas d'autres. Soit $x \in X - \{a\}$; la droite $\overline{ax}$ coupe D en x_i ; d'après P3, $\overline{ax} = D$.
• La troisième propriété est une conséquence immédiate de la dualité !
Question — Existe-t-il d'autres plans projectifs finis d'ordre 2 que le plan de FANO ?

Suggestion : montrez que dans un plan projectif fini d'ordre n, toute partie de cardinal au moins $n+3$ contient trois points alignés.

5 Un exercice

Soient $n \geqslant 2$, X un ensemble à n^2+n+1 éléments appelés *points* et $\mathcal{D}$ une famille de n^2+n+1 parties de X, appelées *droites*, chacune contenant exactement $n+1$ points. Supposons que deux droites quelconques se coupent en au plus un point. Il s'agit de prouver que $\mathcal{P}=(X,\mathcal{D})$ est un plan projectif fini. Étapes de la preuve :

- par deux points, il passe exactement une droite ;
- par un point donné, il passe au plus $n+1$ droites ;
- par un point donné, il passe exactement $n+1$ droites ;
- deux droites se coupent en au moins un point.

Il ne vous reste plus qu'à conclure !

FIN