Option Informatique en Spé MP et MP*
Coloriage de graphes

1 Graphes : ce qu'il faut savoir

Un *graphe non orienté* est un couple $G = (S, A)$ où S est l'ensemble (fini) des *sommets* du graphe, et A un ensemble de paires de sommets ; chaque paire est une *arête* du graphe. Nous dirons que les extrémités d'une arête sont des sommets *voisins*, et qu'ils sont *reliés* par l'arête ; le degré d'un sommet s, noté $\Delta(s)$, est le nombre de voisins de s.

Pour alléger les notations, S sera toujours l'intervalle discret $[\![1, n]\!]$, et l'arête joignant les sommets i et j sera notée ij (ou $i - j$ en cas de besoin). Le nombre d'arêtes est donc compris entre 0 (graphe sans arêtes) et $n(n-1)/2$ (graphe *complet*, noté K_n).

Le *complémentaire* du graphe $G = (S, A)$ est le graphe $\overline{G} = (S, \overline{A})$, où $\overline{A}$ est défini par $xy \in \overline{A} \iff xy \notin A$.

Le *graphe linéaire* à n sommets possède $n-1$ arêtes ; la i-ième arête relie i et $i+1$. Ce graphe est noté p_n, sa *longueur* est $n-1$, et nous dirons qu'il relie 1 et n. Le cycle à n sommets se déduit du graphe linéaire à n sommets par ajout d'une arête joignant n et 1 ; ce graphe est noté C_n, sa longueur est n.

Soient $G = (S, A)$ un graphe et S' une partie de S ; le graphe *induit* est (S', A') où A' est l'ensemble des arêtes de G qui relient des sommets appartenant à A'. Un *chemin* dans un graphe est un graphe induit linéaire ; un *cycle* dans un graphe est un graphe induit cyclique. Une *clique* d'un graphe est un graphe induit complet ; par exemple, deux sommets reliés forment, avec l'arête qui les relie, une 2-clique ; et un 3-cycle est une 3-clique.

Deux sommets sont *connectés* s'il existe un chemin qui les relie ; une *composante connexe* est une classe pour la relation de connexion. Dans une composante connexe, la *distance* qui sépare deux sommets est la longueur minimale d'un chemin qui les relie ; le *diamètre* de la composante est la distance maximale entre deux de ses sommets.

Un graphe (S, A) est *biparti* s'il existe une partition de S en deux sous-ensembles S_1 et S_2, telle que toute arête relie un sommet de S_1 et un sommet de S_2.

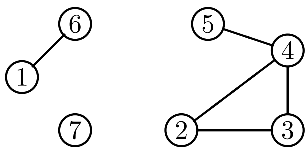


Figure 1: un exemple de graphe

Dans l'exemple, nous trouvons trois composantes connexes et une 3-clique.

2 Coloriage de graphes, nombre chromatique

Un *k-coloriage* d'un graphe $G = (S, A)$ est une fonction $c : S \mapsto [\![1, k]\!]$ telle que $c(i) \neq c(j)$ lorsque i et j sont deux sommets voisins. Le nombre chromatique du graphe, noté $\chi(G)$, est le plus petit k tel que le graphe soit k-coloriable. Par exemple, $\chi(K_n) = n$; $\chi(P_n)$ est égal à 2 si $n \geqslant 2$; et $\chi(C_n)$ est égal à 2 si n est pair, à 3 sinon. Un graphe est biparti ssi il est 2-coloriable. Un coloriage de G est *optimal* s'il utilise $\chi(G)$ couleurs.

Donnons quelques exemples de problèmes qui peuvent se ramener à un coloriage de graphes :

- organisation d'un banquet pendant une réunion diplomatique : on ne veut pas mettre deux ennemis jurés à même table ;
- stockage de produits chimiques : deux produits incompatibles doivent être stockés dans des lieux différents (exemple outrageusement simplifié) ;

- allocation de ressources identiques, pour répondre à des demandes définies chacune par un intervalle de temps (voir section 4).

Il est clair que $\chi(G)$ est majoré par n et minoré par le cardinal maximal d'une clique, que l'on note $\omega(G)$.
Algorithme glouton de coloriage : numéroter arbitrairement les arêtes ; attribuer au $i-$ième sommet la plus petite couleur admissible.
Une conséquence de l'algorithme glouton : $\chi(G)$ est majoré par $1 + \max\limits_{s \in S} \Delta(s)$

Théorème 1 Soit G un graphe. Les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

1. G est 2-coloriable ;

2. G ne contient pas de cycle de longueur impaire ;

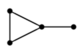
3. G est biparti.

Question — Démontrez ce théorème.

Question — Fixons $n \geqslant 1$ et définissons un graphe $\Gamma_n = (S, A)$ comme suit : S est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$; deux permutations f et g sont voisines ssi il existe une transposition τ telle que $f = \tau \circ g$. Quel est le nombre chromatique de Γ_n ?

3 Polynôme chromatique d'un graphe

Notons χ_G la fonction qui, à $k \in \mathbb{N}$, associe le nombre de k-coloriages de G. Par définition, $\chi_G(k)$ est nul ssi $k < \chi(G)$. Quelques exemples : $\chi_{K_n}(k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$; $\chi_{\overline{K_n}}(k) = k^n$; $\chi_{P_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$.

Question — Calculez le polynôme chromatique du graphe  .

Question — Montrez que $X^4 - 4X^3 + 3X^2$ n'est pas un polynôme chromatique.

Pour la suite, nous avons besoin de définir deux opérations sur les graphes. Soit $G = (S, A)$ un graphe ayant au moins une arête. Soit $e = xy$ une arête de G. Nous noterons $G - e$ le graphe obtenu par suppression de l'arête e. Nous noterons $G \cdot e$ le graphe obtenu par *contraction* de l'arête e : cette opération consiste à confondre x et y (donc $G \cdot e$ possède un sommet de moins que G), à ne garder qu'une seule des arêtes qui reliaient x et y à chaque sommet voisin commun ; et à renuméroter les sommets si l'on veut rester conforme à la convention d'écriture proposée plus haut.

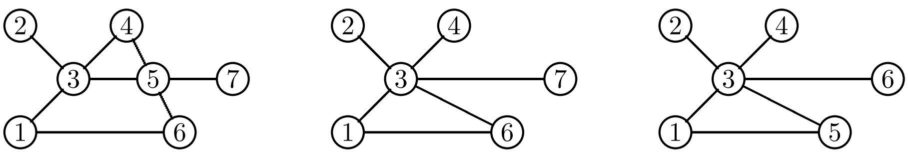


Figure 2: contraction de l'arête $3-5$, suivie d'une renumérotation

Théorème 2 χ_G est un polynôme unitaire de degré n.

Preuve : nous raisonnons par récurrence sur le nombre de sommets. Le résultat est clair pour un graphe à un seul sommet. Supposons le résultat acquis pour tout graphe ayant moins de n sommets, et montrons la propriété pour tout G à n sommets. Nous considérons n comme fixé, et nous raisonnons par récurrence sur le nombre d'arêtes ; le résultat est à nouveau clair si G n'a aucune arête. Soit donc G ayant $p > 0$ arêtes. Choisissons une arête e de G ; nous constatons que :

$$\chi_G(k) = \chi_{G-e}(k) - \chi_{G \cdot e}(k) \tag{1}$$

Avec les hypothèses de récurrence, χ_{G-e} est unitaire de degré n, et $\chi_{G \cdot e}$ est unitaire de degré $n-1$. Fin de la preuve.

Question — Prouvez la formule 1.

Question — Que pouvez-vous dire du signe des coefficients de χ_G ?

Question — Que pouvez-vous dire du coefficient de X^{n-1} ?

Question — Notons d l'ordre de multiplicité de la racine 0 de χ_G. Quelle relation simple existe-t-il entre d et le graphe G ?

Une fois obtenu le polynôme chromatique, on peut calculer $\chi(G)$ en déterminant le plus petit k tel que $\chi_G(k)$ soit non nul. Un peu d'astuce permet de réaliser ceci pour un coût $\mathcal{O}\big(n\ln(n)\big)$.

Question — Quelle est cette astuce ?

4 Coloriage d'un graphe d'intervalles

Un graphe $G = (S, A)$ à n sommets est un *graphe d'intervalles* si l'on peut trouver une famille $(\mathcal{I}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que xy soit une arête de G ssi les intervalles $\mathcal{I}_x$ et $\mathcal{I}_y$ ne sont pas disjoints.

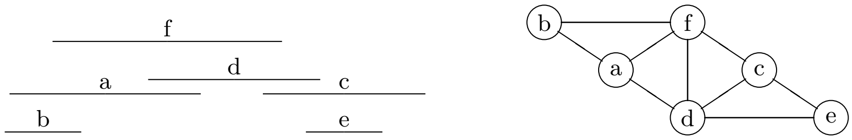


Figure 3: une famille d'intervalles (à gauche) et le graphe associé (à droite)

Ces graphes apparaissent naturellement dans les problèmes d'affectation de ressources, avec des contraintes temporelles. Donnons quelques exemples :

- les horaires des cours ayant été fixés, vous devez attribuer les salles, de telle façon que deux cours n'aient pas lieu au même moment dans la même salle ;
- les *registres* d'un micro-processeurs sont des emplacements de mémoires très rapidement accessibles ; leur nombre est petit (typiquement, 32 ou 64) ; il y a avantage à loger les variables dans les registres, mais il ne faut pas qu'à un même moment deux variables soient logées dans le même registre !

Nous reconnaissons dans les deux cas le même problème : colorier un graphe d'intervalles. Dans le deuxième cas, un bon compilateur sait déterminer l'intervalle pendant lequel une variable est *vivante* : de sa première affectation, jusqu'à sa dernière utilisation.

Théorème 3 Si nous trions les intervalles par date de début croissante, alors l'algorithme glouton produit un coloriage optimal en temps linéaire.

Question — Justifiez en détail l'affirmation précédente ; quelle structure de données proposez-vous d'utiliser pour les couleurs disponibles ?

Question — Montrez qu'un graphe d'intervalles G vérifie $\chi(G) = \omega(G)$.

Soit C un cycle de longueur au moins 4, dans un graphe G ; une *corde* de ce cycle est une arête de g joignant deux sommets de C, mais n'appartenant pas à C. Nous dirons qu'un graphe G est *cordé* si tout cycle de longueur au moins 4 comporte une corde.

Question — Montrez que tout graphe d'intervalles est cordé.

FIN