Option Informatique en Spé MP et MP*
Blocs combinatoires

1 Définitions et exemples

Définition 1 Soient v, k, t et λ des naturels non nuls, vérifiant $v > k \geqslant t$. Un *jeu de blocs* de type $t-(v,k,\lambda)$ est un couple $(V,\mathcal{B})$ où :

- V est un ensemble à v éléments ;
- $\mathcal{B}$ est une famille de k-parties de V, appelées *blocs*, telle que toute t-partie de V soit contenue dans exactement λ blocs.

Remarque : le terme anglais *block design* a été traduit ici *jeu de blocs.*

Exemple 1 : un plan projectif fini d'ordre n nous fournit un jeu de blocs de type $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$: l'ensemble des points est V et l'ensemble des droites est $\mathcal{B}$.

Un petit aperçu sur les plans projectifs

Soient X un ensemble fini non vide et $\mathcal{D}$ une famille de parties de X. Nous dirons que $(X,\mathcal{D})$ est un *plan projectif fini* si les trois axiomes suivants sont satisfaits :

P1 il existe une partie F de X, de cardinal 4, telle que $|F\cap D| \leqslant 2$ pour tout $D\in\mathcal{D}$;

P2 si D_1 et D_2 sont deux éléments distincts de $\mathcal{D}$, alors $|D_1\cap D_2| = 1$;

P3 si x_1 et x_2 sont deux éléments distincts de X, alors il existe un et un seul $D\in\mathcal{D}$ tel que $\{x_1,x_2\}\subset D$.

Les *points* de $\mathcal{P}$ sont les éléments de X ; les *droites* de $\mathcal{P}$ sont les éléments de $\mathcal{D}$. Nous dirons que «la droite D passe par le point x» lorsque $x\in D$. L'unique droite passant par deux points distincts x_1 et x_2 sera notée $\overline{x_1x_2}$. L'*intersection* de deux droites D et D' distinctes est l'unique point de $D\cap D'$. Donnons un exemple : le plan de Fano comporte sept points (numérotés de 1 à 7) et sept droites (étiquetées de a à g). Une représentation de ce plan apparaît à la figure 1 ; notez que la septième droite est la courbe passant par les milieux des côtés du triangle. On montre que toutes les droites d'un plan projectif fini ont le même cardinal ; l'*ordre* du plan projectif est le nombre $|D|-1$, où D est une droite quelconque.

Exemple 2 : soient V un ensemble fini non vide, de taille v, et $k\in[\![1,v]\!]$. Notons $\mathcal{B}=\binom{V}{k}$ la famille des k-parties de V. Pour tout $t\in[\![1,k]\!]$, $(V,\mathcal{B})$ est un jeu de blocs (dit *trivial*) de type $t-(v,k,\lambda)$ où $\lambda=\binom{v-t}{k-t}$.

Suggestion : justifiez cette affirmation.

La première question qui se pose est : pour v, k, t et λ donnés, existe-t-il un jeu de blocs de type $t-(v,k,\lambda)$?

2 Une condition nécessaire

Théorème 1 Pour qu'il existe un jeu de blocs de type $t-(v,k,\lambda)$, il est nécessaire que les fractions

$$\lambda\frac{v(v-1)\dots(v-t+1)}{k(k-1)\dots(k-t+1)}, \lambda\frac{(v-1)\dots(v-t+1)}{(k-1)\dots(k-t+1)}, \dots, \lambda\frac{v-t+1}{k-t+1}$$

soient toutes des entiers.

Preuve — Fixons $s \in [\![0, t]\!]$ et une s-partie S de V. Déterminons de deux façons différentes le nombre N de couples (T, B) tels que T soit une t-partie de V, B un élément de $\mathcal{B}$, $S \subset T$ et $T \subset B$.

T peut être choisi de $\binom{v-s}{t-s}$ façons, et chaque T est contenu dans exactement λ blocs ; donc $N = \lambda\binom{v-s}{t-s}$. Par ailleurs, notons M le nombre de blocs contenant S ; chaque bloc contenant S contient exactement $\binom{k-s}{t-s}$ sous-ensembles T de taille t, tels que $S \subset T$; donc $N = M\binom{k-s}{t-s}$. Nous en déduisons

$$M = \lambda\frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} = \lambda\frac{(v-s)\dots(v-t+1)}{(k-s)\dots(k-t+1)}$$

Remarque : pour $s = 0$, nous voyons que $\lambda\dfrac{v(v-1)\dots(v-t+1)}{k(k-1)\dots(k-t+1)}$ est le nombre total de blocs.

Pour $s = 1$, nous voyons que $\lambda\dfrac{(v-1)\dots(v-t+1)}{(k-1)\dots(k-t+1)}$ est le nombre de blocs auxquels appartient un $x \in V$ donné ; cette quantité sera notée r (parce que c'est le facteur de *repétition* de x).

3 Systèmes de triplets de Steiner

Un exemple non trivial de jeu de blocs est obtenu pour $t = 2$, $\lambda = 1$ et $k = 3$. L'ensemble V étant fixé, les blocs sont des triplets tels que chaque paire d'éléments de V est contenue dans un et un seul triplet. En termes de graphes, ceci revient à couvrir les arêtes d'un graphe complet avec des triangles disjoints.

Le théorème 1 nous dit que, pour qu'un tel jeu de blocs existe, il faut que $\dfrac{v(v-1)}{6}$ et $\dfrac{v}{2}$ doivent être entiers, ce qui revient à dire que v doit être égal à 1 ou à 3 *modulo* 6. Pour $v = 7$, nous obtenons le plan de FANO, représenté à la figure 1.

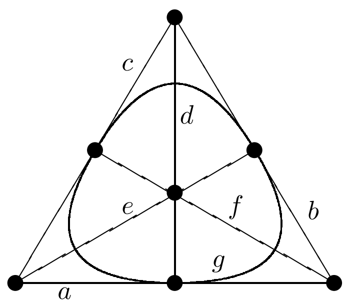

Figure 1: le plan de Fano

Suggestion : soit m un naturel impair ; notons $n = 3m$. Soit X l'ensemble des couples (x, i) tels que $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $0 \leqslant x < m$. Définissons $\mathcal{M}$ comme l'ensemble des triplets $\{(x, 1), (x, 2), (x, 3)\}$ et des triplets de la forme $\{(x, i), (y, i), (z, \bar{\imath})\}$ où x, y et z sont distincts, $\overline{1} = 2$, $\overline{2} = 3$ et $\overline{3} = 1$. Montrez que $(X, \mathcal{M})$ est un système de triplets de Steiner.

4 Inégalité de Fisher

Théorème 2 Soit $(V, \mathcal{B})$ un jeu de blocs de type $2-(v, k, \lambda)$. Si $v > k$, alors $|\mathcal{B}| \geqslant |V|$.

Remarque : il existe des jeux de blocs tels que $|\mathcal{B}| = |V|$, par exemple les plans projectifs finis ; donc, en un certain sens, l'inégalité de Fisher est optimale.

Remarque : il ne peut exister de jeu de blocs de type $2-(v, k, \lambda)$ avec $t = 2$, $v = 16$, $k = 6$ et $\lambda = 1$: le nombre de blocs devrait être $\dfrac{16 \cdot 15}{6 \cdot 5} = 8$. Pourtant, les paramètres satisfont les conditions du théorème 1, puisque $r = \dfrac{15}{5} = 3$.

Suggestion : montrez qu'il n'existe pas de jeu de blocs de type $2-(21,6,1)$ ou $2-(25,10,3)$.

5 Preuve de l'inégalité de Fisher

Soient $V=\{x_1,\dots,x_v\}$ un ensemble et $\mathcal{B}=(B_1,\dots,B_b)$ une famille de parties de V. Définissons la *matrice d'incidence* du couple $(V,\mathcal{B})$: c'est une matrice A à v lignes et b colonnes ; $A_{i,j}$ vaut 1 si $x_i\in B_j$ et 0 sinon. La matrice $M=A\times A^T$ est carrée d'ordre v ; nous allons montrer que la forme de M est très simple.

Nous avons $M=\displaystyle\sum_{k=1}^{b}A_{i,k}A_{j,k}$; donc $M_{i,j}$ est le nombre de blocs qui contiennent à la fois x_i et x_j. De par la définition d'un bloc, $M_{i,j}$ n'a que deux valeurs possibles : $M_{i,j}=\lambda$ si $i\neq j$, et $M_{i,j}=\lambda\dfrac{v-1}{k-1}$ si $i=j$. Rappelons que ce dernier nombre est noté r. Donc :

$$M=\begin{pmatrix} r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \dots & \lambda \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \dots & r \end{pmatrix}$$

Nous avons $\det(M)=\big(r+(v-1)\lambda\big)(r-\lambda)^{v-1}$, donc M est inversible. Si nous avions $b<v$, le rang de A serait inférieur à v ; il en serait de même du rang de M. Donc $b\geqslant v$.
Suggestion : effectuez le calcul de $\det(M)$ et rédigez la preuve de l'inversibilité de M.

Suggestion : donnez une preuve directe de l'inégalité de Fisher dans le cas $\lambda=1$.

6 Applications

Nous voulons tester l'effet de v traitements sur une plante. Pour ce faire, nous réalisons une suite d'expériences : au cours de chacune d'elles, nous appliquons k traitements à un échantillon, ce qui nous donne un bloc. Tester tous les blocs de taille k serait trop coûteux : nous devons donc construire un «petit» ensemble de blocs «bien choisis».

Ce faisant, nous ne pourrons tester toutes les situations possibles d'influence mutuelle entre traitements. Mais nous pouvons par exemple satisfaire la condition suivante : chaque paire de traitements apparaît dans exactement λ expériences. Il nous reste dans ce cas à exhiber un bloc de type $2-(v,k,\lambda)$.

FIN