

Option informatique en Sup MPSI

Devoir en temps limité

vendredi 28 mai 2004

Résumé

Nous prenons prétexte du problème du tracé de droites sur un écran d'ordinateur pour définir les mots de *Christoffel* ; ceux-ci nous fournissent des exemples de mots *sturmiens*, c'est à dire des mots non ultimement périodiques de complexité minimale (dans un sens qui sera précisé dans l'énoncé).

Notations et définitions

Pour tout alphabet fini A , on note A^* l'ensemble des mots finis sur A , et $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis de A . On rappelle que A^* muni de l'opération de concaténation est un monoïde dont l'élément neutre est le mot vide ε .

Si $m = m_0m_1 \cdots m_n$ est élément de A^* , on note $|m| = n + 1$ la longueur du mot m et, pour tout élément a de A , $|m|_a$ le nombre d'apparitions de la lettre a dans le mot m : $|m|_a = \text{card}\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket / m_k = a\}$.

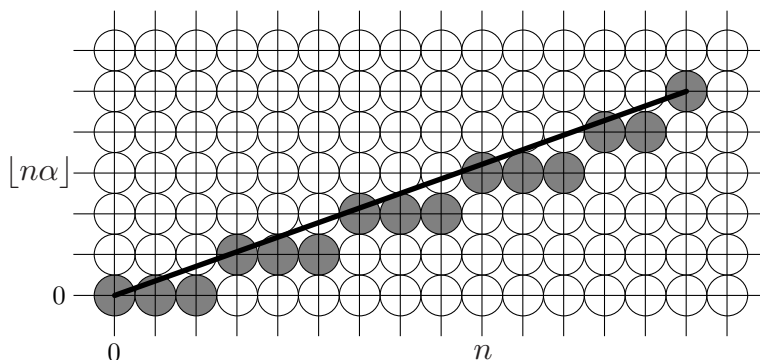
On dit qu'un mot infini u est *périodique* de période p si on a : $u_{i+p} = u_i$ pour tout nombre entier i .

On dit que le mot m est *ultimement périodique* de période p s'il existe un nombre entier i_0 tel que l'on ait : $u_{i+p} = u_i$ pour tout nombre entier i supérieur ou égal à i_0 .

1 L'algorithme de Christoffel

Les points d'une fenêtre graphique (les *pixels*) sont des disques disjoints centrés aux points de coordonnées entières. Tracer un segment de droite revient donc à allumer les pixels «les plus proches» (en un sens à préciser) de la droite mathématique.

L'algorithme de *Christoffel* consiste à allumer, pour toute abscisse entière x , le point à coordonnées entières se situant immédiatement en-dessous du point d'abscisse x de la droite mathématique.



On considère un nombre réel α compris entre 0 et 1 : $\alpha \in [0, 1]$, et la demi-droite \mathcal{D}_α d'origine O et de pente α ; cette droite est approximée par l'ensemble $\mathcal{C} = \{(n, \lfloor n\alpha \rfloor), n \in \mathbb{N}\}$. On code alors l'ensemble \mathcal{C} par le mot infini $c = c_0c_1 \cdots c_n \cdots$ sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ défini par :

$$c_n = \begin{cases} a & \text{si } \lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor \\ b & \text{si } \lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor + 1 \end{cases}$$

On dit que c est le *mot de Christoffel* associé à la droite \mathcal{D}_α .

Question 1.

- 1.a Soient p et q deux entiers strictement positifs, premiers entre eux, et tels que $p < q$. Montrer que le mot de Christoffel associé à la droite $\mathcal{D}_{\frac{p}{q}}$ est périodique.
- 1.b Réciproquement, montrer que si mot de Christoffel associé à la droite \mathcal{D}_α est ultimement périodique, alors α est un nombre rationnel.

Question 2.

Montrer que, dans tout mot de Christoffel, l'un des deux mots aa ou bb n'apparaît jamais. Est-il possible qu'aucun des deux n'apparaissent ?

Question 3.

Soit c le mot de Christoffel associé à la droite \mathcal{D}_α , et m un facteur de c de longueur n . On note $p = |m|_a$ le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot m .

- 3.a Montrer que $n(1 - \alpha) - 1 < p < n(1 - \alpha) + 1$.
- 3.b En déduire que si m et m' sont deux facteurs de longueur n du mot c , alors $||m|_a - |m'|_a| \leq 1$.

2 Mots sturmiens

Soit $u = u_0u_1 \cdots u_n \cdots$ un mot infini sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. On note $\mathcal{L}(u)$ le langage associé au mot infini u , c'est à dire l'ensemble des facteurs de u , et $\mathcal{L}_n(u)$ l'ensemble $\mathcal{L}(u) \cap A^n$ des facteurs de u de longueur n .

Par définition, la *complexité* du mot u est la suite $(P_u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_u(n) = \text{card } \mathcal{L}_n(u).$$

Question 4.

- 4.a Existe-t-il des mots vérifiant : $P_u(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
- 4.b Quelle est la complexité du mot $u = abababa \cdots$ définie par : $u_n = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ est pair} \\ b & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$?
- 4.c Donner un exemple de mot vérifiant : $P_u(n) = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 5.

On considère maintenant un mot $u \in A^{\mathbb{N}}$ quelconque

- 5.a Montrer que la suite $(P_u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- 5.b Montrer que pour tout couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, on a : $P_u(n_1 + n_2) \leq P_u(n_1)P_u(n_2)$.
- 5.c On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P_u(n_0) < 2^{n_0}$. Montrer qu'alors : $P_u(n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(2^n)$.

Question 6.

- 6.a Montrer que si u est un mot ultimement périodique, la suite $(P_u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 6.b Montrer que s'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P_u(n_0 + 1) = P_u(n_0)$, alors le mot u est ultimement périodique, de période inférieure ou égale à $P_u(n_0)$.
- 6.c En déduire que si u est un mot non ultimement périodique, alors $P_u(n) \geq n + 1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

La question précédente a montré que les mots ultimement périodiques sont ceux de complexité station-

naire ; parmi les autres mots, ceux de complexité minimale vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_u(n) = n + 1 ;$$

de tels mots sont appelés des mots *sturmiens*. On notera qu'il n'est pas évident que de tels mots existent.

Question 7.

- 7.a** On considère un mot Sturmien u , et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique facteur m de longueur n tel que ma et mb soient facteurs (de longueur $n + 1$) de u , et que les autres facteurs de longueur n se prolongent à droite de manière unique.
- 7.b** Montrer que dans un mot Sturmien, tout facteur qui apparaît, apparaît une infinité de fois.

Nous allons maintenant prouver l'existence de mots sturmiens en démontrant la propriété suivante :

Si u est un mot infini non ultimement périodique tel que tout couple (v, w) de facteurs de même longueur de u vérifie : $||v|_a - |w|_a| \leq 1$, alors u est un mot Sturmien.

Question 8.

Soit u un mot infini non ultimement périodique et non Sturmien.

- 8.a** Soit n_0 le plus petit entier vérifiant : $P_u(n_0 + 1) \geq n_0 + 3$. Montrer qu'il existe deux facteurs distincts v et w de longueur n_0 tels que va, vb, wa, wb soient facteurs de u .
- 8.b** En déduire que u possède deux facteurs v' et w' de même longueur vérifiant : $|v'|_a - |w'|_a \geq 2$.
- 8.c** Montrer alors que pour tout nombre irrationnel α , le mot de Christoffel associé à la droite \mathcal{D}_α est Sturmien.

Nous allons enfin montrer la réciproque du théorème précédent, en montrant que si u est un mot Sturmien, tout couple (v, w) de facteurs de même longueur de u vérifie : $||v|_a - |w|_a| \leq 1$.

Question 9.

On considère un mot infini u possédant deux facteurs v et w de même longueur vérifiant : $|v|_a - |w|_a \geq 2$.

- 9.a** Montrer que u possède deux facteurs de même longueur v' et w' vérifiant : $|v'|_a - |w'|_a = 2$.
- 9.b** Montrer que dans ce cas on peut supposer, quitte à prendre des mots plus courts, qu'il existe un facteur z (éventuellement vide) tel que : $v' = aza$ et $w' = bzb$.
- 9.c** Soit z un mot de longueur minimale satisfaisant à la condition précédente. Montrer que z est un palindrome.
- 9.d** En déduire que le mot u n'est pas Sturmien.

