complément :

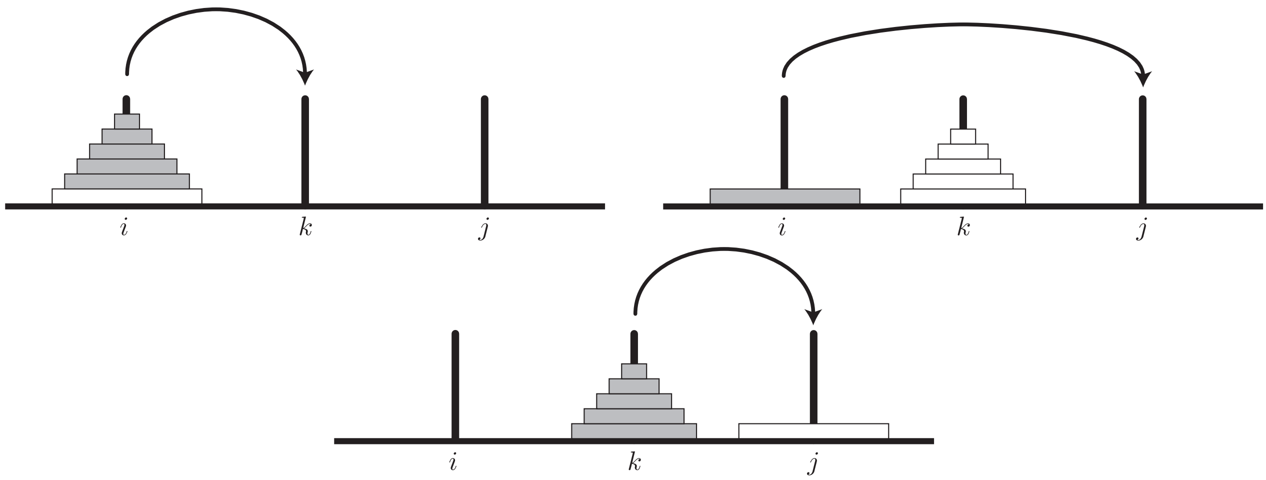
Tours de Hanoï et baguenaudier

1 – On considère le problème des tours de Hanoï (inventé par la mathématicien français Édouard Lucas) : on dispose de trois tiges et de n disques de diamètres différents, troués en leur centre. Initialement, les n disques sont enfilés sur la tige de gauche, du plus grand au plus petit. Le but du jeu est de les amener sur la tige de droite, en ne déplaçant qu'un disque à la fois, et en ne posant jamais un disque sur un disque plus petit que lui.

Le principe de la résolution est récursif :

On désigne par 1, 2, 3 les trois tiges, de gauche à droite. Si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, on déplace n disques de la tige i à la tige j de la manière suivante :

– on amène les $n-1$ disques du haut de la tige i sur la tige k ;
– on déplace le disque supérieur de i vers la tige j ;
– on amène les $n-1$ disques du haut de la tige k vers la tige j.



Écrire une fonction Caml résolvant ce problème, en adoptant une présentation analogue à l'exemple suivant (pour $n = 3$) :

```
# hanoï 3 ;;
déplacer un disque de 1 vers 3
déplacer un disque de 1 vers 2
déplacer un disque de 3 vers 2
déplacer un disque de 1 vers 3
déplacer un disque de 2 vers 1
déplacer un disque de 2 vers 3
déplacer un disque de 1 vers 3
- : unit = ()
```

Calculer le nombre de déplacements que nécessite cet algorithme, et montrer que cette solution est optimale.

2 – Écrire une fonction Caml permettant de résoudre le problème des tours de Hanoï lorsqu'on s'interdit les mouvements entre la tige 1 et la tige 3 (ainsi, tous les mouvements doivent aboutir ou débuter par la tige 2). Compter le nombre de mouvements nécessaires.

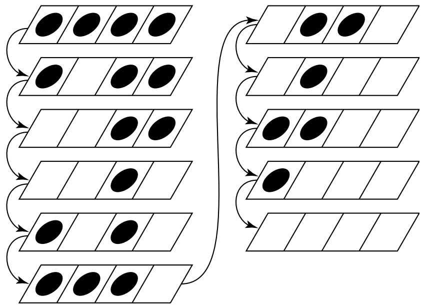
3 – On note t_n le nombre minimal de mouvements nécessaire pour résoudre le problème des tours de Hanoï lorsqu'on dispose de quatre tiges et de n disques. Montrer que si $k \in [\![0, n]\!]$, $t_n \leqslant 2t_{n-k} + 2^k - 1$, et en déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ t_{p(p+1)/2} \leqslant 2t_{p(p-1)/2} + 2^p - 1.$$

Montrer ensuite que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $t_{p(p+1)/2} \leqslant 2^p(p-1) + 1$.

Justifier la croissante de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et en déduire l'existence d'un algorithme résolvant le problème à quatre tiges avec un coût en $O(\sqrt{n}2^{\sqrt{2n}})$.

4 – Le jeu du baguenaudier se joue de la manière suivante : on dispose d'une réglette contenant n cases numérotées de 1 à n sur chacune desquelles est déposé un pion. Le but du jeu est d'ôter ces n pions en respectant les règles suivantes :



– il n'y a jamais plus d'un pion par case ;
– on peut à tout moment poser (s'il n'y en a pas) ou enlever (s'il y en a un) un pion sur la case 1 ;
– on peut poser ou enlever un pion sur la case numérotée $j \in [\![2, n]\!]$ s'il y a un pion sur la case $j-1$ et aucun sur les cases précédentes.

(Voir ci-contre un exemple de résolution du problème pour $n = 4$).

Écrire deux procédures récursives `vider` et `remplir` permettant respectivement de vider les n premières cases lorsque celles-ci sont pleines, et de les remplir lorsqu'elles sont vides.

Combien de mouvements nécessite cette méthode pour résoudre le problème du baguenaudier ?

■