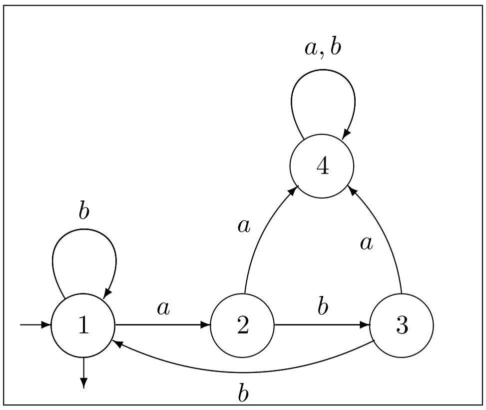
Option Informatique en Spé MP et MP*
Automates finis : le corrigé

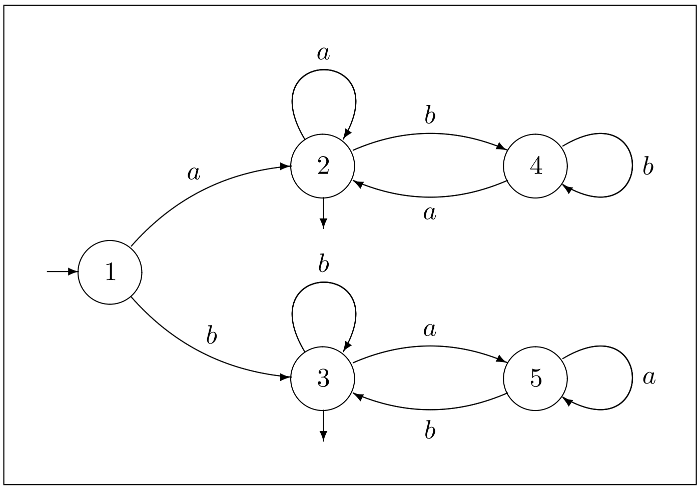
Question 1 • **À FAIRE !**

Question 2 • Tout se passe comme si les éléments de L étaient écrits avec les lettres b et abb, donc L est décrit par l'expression $(b + abb)^*$. Voici un afdc qui reconnaît L :

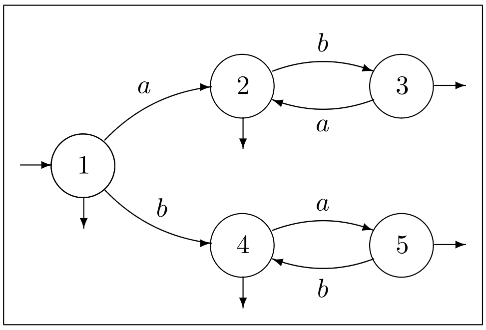


Les résiduels de L sont $\varepsilon^{-1}L = L$, $a^{-1}L = bbL$, $(ab)^{-1}L = bL$ et $(aa)^{-1}L = \emptyset$. Donc l'automate proposé est minimal.

Question 3 • Clairement, $L = aX^*a + bX^*b + a + b$ donc L est rationnel. Énumérons les résiduels de L : $a^{-1}L = \varepsilon + X^*a$ et $b^{-1}L = \varepsilon + X^*b$; si $u \in X^*$, alors $(aub)^{-1}L = X^*a$, $(bua)^{-1}L = X^*b$, $(aua)^{-1}L = a^{-1}L$ et $(bub)^{-1}L = b^{-1}L$. Enfin, $\varepsilon^{-1}L = L$. L'afdc ci-dessous reconnaît L, et il est minimal puisque le nombre de ses états est égal au nombre de résiduels de L.

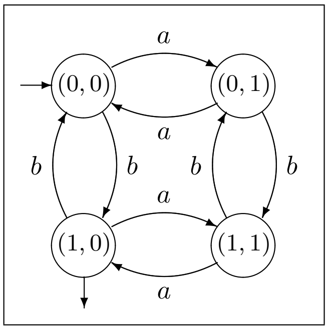


Question 4 • Il suffit de distinguer les mots de longueur paire et ceux de longueur impaire ; ainsi, $L = (ab)^* + (ba)^* + a(ba)^* + b(ab)^*$. L'automate ci-dessous reconnaît L :



Cet automate est déterministe ; on le complète facilement avec un état poubelle auquel mènent, depuis les états 2 et 5, des transitions étiquetées a, et, depuis les états 3 et 4, des transitions étiquetées b.

Question 5 • L'automate suivant reconnaît le langage proposé :

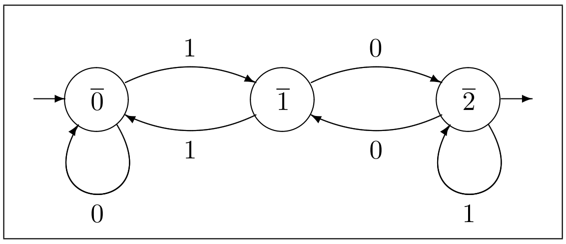


Clairement, un calcul commencé par l'état $(0,0)$ et d'étiquette u se termine par l'état (i,j) où

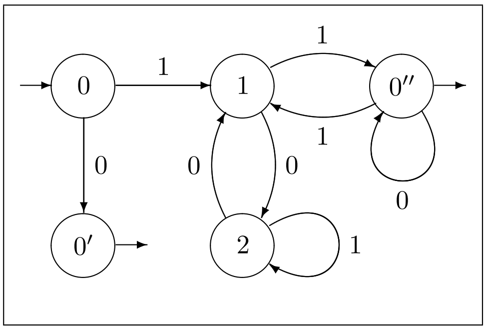
$$i \equiv |u|_a \pmod 2 \quad \text{et} \quad j \equiv |u|_b \pmod 2$$

Notant L le langage reconnu, les résiduels de L sont $\varepsilon^{-1}L = L$, $a^{-1}L = aL$, $b^{-1}L = bL$ et $(ab)^{-1}L = (ba)^{-1}L = abL = baL$, qui sont les langages de départ des états $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$ respectivement.

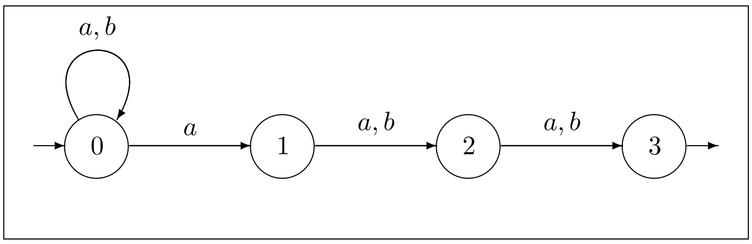
Question 6 • Les états des automates sont les classes modulo 3 des naturels ; les transitions se déduisent des règles de calcul dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:



En fait, cet automate ne répond pas en toute rigueur à la question posée, car il reconnaît le mot vide, ainsi que les mots de longueur supérieure à 1 commençant par un 0. Voici une solution correcte :



Question 7 • Dessinons l'automate pour $n = 3$:



On généralise aisément à n quelconque.

Soient u et v deux éléments de X^n tels que $\delta^*(i,u) = \delta^*(i,v)$. Notons w le plus long suffixe commun à u et v : il existe des mots x et y tels que $u = xaw$ et $v = ybw$ (par exemple). Soit z tel que $|wz| = n-1$ (un tel z existe car $|w| < n$). Alors $uz = xawz \in L$ et $vz = ybwz \notin L$; mais ceci est contradictoire car $\delta^*(i,uz) = \delta^*\big(\delta^*(i,u),z\big) = \delta^*\big(\delta^*(i,v),z\big) = \delta^*(i,vz)$. Donc la fonction $u \in A^n \mapsto \delta^*(i,u)$ est injective. Comme A^n a pour cardinal 2^n, Q a pour cardinal au moins 2^n.

Question 8 • Consultez le numéro de mars 1984 de la revue *Pour la Science*.

Question 9 • Soit u un mot reconnu par l'automate $\mathcal{A}$. Le cas $u = \varepsilon$ est clair. Sinon, on peut décomposer u en produit de facteurs dont chacun est l'étiquette d'un calcul commençant et finissant dans l'état initial. Nous allons montrer que la contribution de chacun de ces facteurs à la somme $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant |u|} u_k F_k$ est nulle, ce qui prouvera que cette somme est elle-même nulle, et donc que u appartient à L. Soit v un tel facteur, et p la longueur du préfixe de u lu avant v. Le cas $v = \mathbf{0}$ est clair. Par raison de symétrie, il suffit d'examiner le cas $v_1 = \mathbf{1}$; v est de longueur impaire, $|v| = 2k + 3$ où k est le nombre d'occurrences de $\mathbf{0}$ dans v, mais aussi le nombre de passages dans la «petite boucle» de gauche. Plus précisément : $v = \mathbf{11}(\mathbf{01})^k\overline{\mathbf{1}}$. Définissons une fonction g par :

$$g(q) = F_{p+1} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant q+1} F_{p+2i} - F_{p+2q+3}$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} g(0) & = & F_{p+1} + F_{p+2} - F_{p+3} = 0 \\ g(q+1) & = & g(q) + F_{p+2q+3} + F_{p+2q+4} - F_{p+2q+5} = g(q) \end{array}$$

Par récurrence, on en déduit $g(q) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. En particulier, la contribution de v est

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant |v|} v_k F_{p+i} = F_{p+1} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k+1} F_{p+2i} - F_{p+2k+3} = g(k) = 0$$

ce qui termine la preuve.

• Réciproquement, montrons que tout mot $u \in L$ est reconnu par notre automate, en raisonnant par récurrence sur la longueur de u. Si $|u| = 0$, alors $u = \varepsilon$, qui est dans L et est reconnu par $\mathcal{A}$. Supposons le résultat acquis pour tout mot de L de longueur au plus n, et soit $u \in L$ de longueur $n + 1$. Si la dernière lettre de u est $\mathbf{0}$, le préfixe v de longueur n de u est dans L, donc est reconnu par $\mathcal{A}$; alors $u = v\mathbf{0}$ est clairement reconnu par $\mathcal{A}$. Sinon, on peut supposer par raison de symétrie que la dernière lettre de u est $\overline{\mathbf{1}}$. L'avant-dernière lettre de u est nécessairement $\mathbf{1}$; en effet, une récurrence immédiate montre que $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} F_k = F_{p+2} - 3$, donc

$$\psi(u) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} u_k F_k \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} F_k + u_n F_n - F_{n+1} \leqslant u_n F_n - 3$$

Mais $\psi(u) = 0$, si bien que l'on ne peut avoir ni $u_n = \mathbf{0}$ ni $u_n = \overline{\mathbf{1}}$. À ce stade, il est clair que $n \geqslant 2$, sinon on aurait $u = \mathbf{1}\overline{\mathbf{1}}$ qui n'est manifestement pas dans L. Notons v le préfixe de longueur $n - 2$ de u, et $x = u_{n-1}$ l'antépénultième lettre de u de sorte que $u = vx\mathbf{1}\overline{\mathbf{1}}$. Trois cas de figure sont à envisager :

• $x = \overline{\mathbf{1}}$ est impossible : on aurait

$$\begin{array}{rcl} \psi(u) & = & \psi(v) - F_{n-1} + F_n - F_{n+1} \\ & \leqslant & \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n-2} F_k - 2F_{n-1} = F_n - 3 - 2F_{n-1} = -F_{n-1} - F_{n-2} - 3 < 0 \end{array}$$

• $x = \mathbf{1}$, alors $\psi(v) = \psi(v\mathbf{11}\overline{\mathbf{1}}) = \psi(u)$; par hypothèse de récurrence, v est reconnu, donc u l'est aussi (en utilisant le fait que l'unique état initial de $\mathcal{A}$ est aussi son unique état final)

• $x = \mathbf{0}$, alors

$$\psi(u) = \psi(v\mathbf{01}\overline{\mathbf{1}}) = \psi(v) + F_n - F_{n+1} = \psi(v) - F_{n-1} = \psi(v\overline{\mathbf{1}})$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, $v\overline{\mathbf{1}}$ est reconnu par L ; lors du calcul reconnaissant ce mot, après lecture du préfixe v, on est donc dans l'état b ; par suite, le mot $u = v\mathbf{01}\overline{\mathbf{1}}$ est la trace d'un calcul valide de $\mathcal{A}$ menant de l'état initial à l'état final : u est reconnu par $\mathcal{A}$. Et c'est ainsi que se termine la preuve.

FIN