Option Informatique en Spé MP et MP*
Automates finis

Question 1 Définissons la *complexité* d'un langage rationnel L comme le nombre minimal d'états d'un afdc reconnaissant L. Dressez la liste des langages rationnels dont la complexité est égale à 2 ; pour chacun de ces langages, vous donnerez une expression rationnelle le décrivant et un automate fini le reconnaissant.

Question 2 Soit L le langage sur l'alphabet $\{a, b\}$ constitué des mots dans lesquels chaque occurrence de a est suivie d'au moins deux occurrences de b. Décrivez L par une expression rationnelle, puis construisez un afdc qui reconnaît L.

Question 3 **[Vélu 22.1]** Soit L le langage sur $\{a, b\}$ constitué des mots dont la première et la dernière lettre sont égales. Donnez une une expression rationnelle de L ; construisez un afdc reconnaissant L.

Question 4 Soit L le langage sur $\{a, b\}$ constitué des mots dans lesquels il n'y a pas deux lettres consécutives identiques. Donnez une expression rationnelle décrivant L ; construisez un automate fini reconnaissant L.

Question 5 **[Aut 5.1.b]** Construisez un afdc qui reconnaît les mots u sur l'alphabet $\{a, b\}$ tels que $|u|_a$ soit paire et $|u|_b$ soit impaire.

Question 6 **[Aut 5.2]** Soit $X = \{0, 1\}$. Au mot $u \in X^+$ on associe l'entier $f(u)$ représenté en base 2 par u ; ainsi, $f(u) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant |u|} 2^{|u|-k} u_k$. Construisez un automate reconnaissant le langage L suivant :

$$L = \{u \in X^* : f(u) \text{ est multiple de } 3\}$$

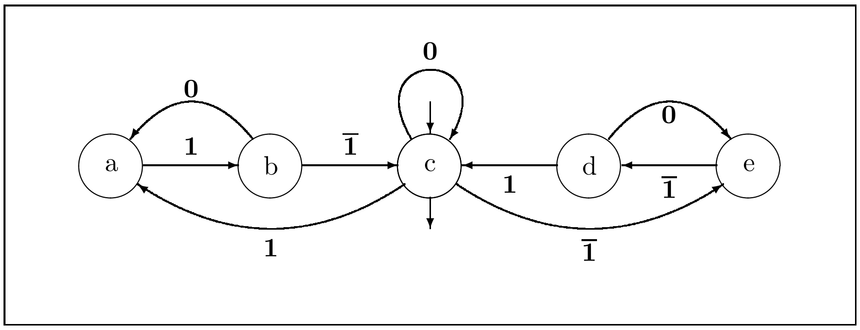
Question 7 **[BBC Section 9.2.3]** Construisez un automate fini à $n + 1$ états reconnaissant le langage $L = (a + b)^* a(a + b)^{n-1}$. Nous nous proposons de prouver que tout afdc reconnaissant L possède au moins 2^n états. Soit donc $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un tel afdc. Montrez que la fonction $u \in A^n \mapsto \delta^*(i, u)$ est injective, et concluez.

Question 8 **[Pour la Science, mars 1984]** Selon Saint Thomas d'Aquin, l'âme humaine peut se trouver dans l'un des huit états suivants :

état de péché originel	état de grâce
état de péché véniel	état de péché mortel
limbes	purgatoire
salut	damnation

Divers événements peuvent faire passer l'âme d'un état dans un autre état : baptême, péché véniel (paresse, gourmandise), péché mortel (meurtre, fornication), absolution, mort, expiation, jugement dernier. À la naissance, l'âme est dans l'état de péché originel. En consultant un dictionnaire (ou un docteur en théologie), représentez par un automate fini les conceptions de Saint Thomas d'Aquin. Quels sont les états finals ?

Question 9 $\star\star\star$ **[ACW, chapitre 7]** Soit L l'ensemble des mots u sur l'alphabet $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \overline{\mathbf{1}}\}$ vérifiant $\sum_{1 \leqslant k \leqslant |u|} u_k F_k = 0$, étant entendu que F_k est le k-ième nombre de Fibonacci et que $\overline{\mathbf{1}} = -1$. Montrez que L est reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ ci-dessous.



Question 10 Dans cet exercice, $X = \{0, 1\}$. La *distance de Hamming* de deux mots u et v de longueur n est le cardinal de $\{i \in [\![1, n]\!] \mid u_i \neq v_i\}$; on la note $d(u, v)$. Montrez qu'il s'agit bien d'une distance sur X^n. Soit $u \in X^n$; pour $L \subset X^n$, on note $d(u, L) = \min\{d(u, v) \mid v \in L\}$; pour $L \subset X^*$, on note $d(u, L) = \min\{d(u, v) \mid v \in L \cap X^n\}$ si $L \cap X^n$ n'est pas vide, $d(u, L) = +\infty$ sinon. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_k(L) = \{u \in X^* \mid d(u, L) \leqslant k\}$. Montrez que si L est rationnel, il en est de même de $\mathcal{H}_k(L)$.

FIN