Option Informatique en Spé MP et MP*
Langages rationnels : le corrigé

Question 1 • La réponse est affirmative : X^* est rationnel, pourtant il contient une infinité de langages non rationnels.

Question 2 • La réponse est affirmative. Soit L_1 un langage non rationnel, sur l'alphabet X. Notons L_2 son complémentaire dans X^* ; il n'est pas rationnel. Pourtant, la réunion $L_1 \cup L_2 = X^*$ est rationnelle.

Question 3 • Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux automates finis. Les langages L et L' qu'ils reconnaissent sont rationnels ; il en est donc de même du langage $M = (L \cap \overline{L'}) \cup (L' \cap \overline{L})$, différence symétrique de L et L'. Or $L = L'$ ssi M est vide ; on sait construire, à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, un automate fini $\mathcal{B}$ qui reconnaît M ; et on sait décider si le langage reconnu par $\mathcal{B}$ est ou non vide. On peut donc, algorithmiquement, décider si deux automates finis reconnaissent le même langage.

Question 4 • L contient M ssi $\overline{L}$ et M sont disjoints ; il suffit donc de reprendre les idées de l'exercice précédent : à partir d'automates finis reconnaissant respectivement L et M, on construit un automate reconnaisant $\overline{L}$, puis un automate reconnaissant $\overline{L} \cap M$; comme on peut décider si le langage reconnu par ce dernier automate est ou non vide, la question est résolue.

Question 5 • On peut évidemment déterminiser $\mathcal{A}$, puis appliquer l'afd obtenu au mot u. Mais il est plus efficace de construire la suite $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant |u|}$ de parties de Q définies par $T_0 = i$ et $T_k = \big\{q' \in Q : \exists q \in T_{k-1} : (q, u_k, q') \in f\big\}$. T_k est l'ensemble des états auxquels mène un calcul de $\mathcal{A}$ commençant par un état initial et ayant pour étiquette le préfixe de u de longueur k. Donc $u \in L$ ssi $T_{|u|} \cap F$ n'est pas vide. Le coût de cette méthode est un $O\big(np|u|\big)$, où n est le nombre d'états de $\mathcal{A}$, et p le nombre de transitions.

Question 6 • Notons $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$; la question ne se pose que si $\mathcal{A}$ n'est pas complet !
• *Méthode 1* : complétons $\mathcal{A}$ par un état poubelle q_ω ; on obtient l'automate $\mathcal{A}^c = (Q^c, \delta^c, i, F)$ où $Q^c = Q \cup \{\omega\}$ et :

$$\delta^c = \delta \cup \big\{(q, x, q_\omega) \mid \text{dans l'état } q\text{, l'automate se bloque s'il lit la lettre } x\big\}$$

Alors l'automate $(Q^c, \delta^c, i, q_\omega)$ reconnaît L.

• *Méthode 2* : L est le complémentaire du langage reconnu par l'automate (Q, δ, i, Q).

• *Méthode 3* : L est le complémentaire de la réunion des deux langages $\mathcal{L}_{AF}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{L}_{AF}(\overline{\mathcal{A}})$.

Question 7 • $Y = Q \times X \times Q$ est un alphabet fini ; l'ensemble des calculs réussis par $\mathcal{A}$ est le langage reconnu par l'automate $\mathcal{B} = (Q, Y, \varphi, i, F)$ où φ est l'ensemble des triplets $\big(q, (q, x, q'), q'\big)$, q et q' décrivant Q et x décrivant X.

Question 8 • Comme A, B et C sont finis, les langages AX^*, X^*B et X^*CX^* sont rationnels ; il en est donc de même de L. Réciproquement, soit L rationnel, reconnu par un automate fini $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$. Le langage des calculs réussis de $\mathcal{A}$ est rationnel local : prendre pour A les transitions de la forme (i, x, q), pour B les transitions de la forme (q, x, q') avec $q' \in F$ et pour C les couples de transitions de la forme $\big((q, x, q'), (q', y, q'')\big)$; or L est son image par le morphisme alphabétique $(q, x, q') \mapsto x$.

Question 9 • Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un afdc reconnaissant L. Soit Q' l'ensemble des états q pour lesquels il existe des mots u et v tels que $\delta^*(i, u) = q$ et $\delta^*(q, v) \in F$. L'automate $\mathcal{B} = (Q, \delta, i, Q')$ reconnaît $\mathsf{Pref}(L)$.

• Voici une autre technique : nous allons définir sur l'ensemble des expressions rationnelles une fonction π telle que $\mathcal{L}_{ER}\big(\pi(e)\big) = \mathsf{Pref}\big(\mathcal{L}_{ER}(e)\big)$. Nous procédons par induction structurelle : $\pi(\emptyset) = \emptyset$, $\pi(\varepsilon) = \varepsilon$; $\pi(x) = \varepsilon + x$ pour tout $x \in X$; $\pi(e + e') = \pi(e) + \pi(e')$; $\pi(ee') = \pi(e) + e\pi(e')$ si $e' \neq \emptyset$, $\pi(ee') = \emptyset$ sinon ; et $\pi(e^*) = e^*\pi(e)$.

• Pour montrer que $\mathsf{Suff}(L)$ est rationnel, on peut reprendre la même méthode : l'automate $\mathcal{C} = (Q, \delta, Q', F)$ reconnaît $\mathsf{Suff}(L)$. On peut aussi noter que $\widetilde{\mathsf{Suff}(L)} = \mathsf{Pref}\big(\widetilde{L}\big)$, puis utiliser le résultat précédent, et le fait que l'image miroir d'un rationnel est elle-même rationnelle. Enfin, on peut se contenter de noter que $\mathsf{Suff}(L)$ est la réunion des résiduels de L, lesquels sont rationnels, et en nombre fini.

• Pour montrer que $\mathsf{Fact}(L)$ est rationnel, on peut exhiber l'automate $\mathcal{D} = (Q, \delta, Q', Q')$ qui reconnaît $\mathsf{Fact}(L)$. On peut aussi utiliser l'une des égalités $\mathsf{Fact}(L) = \mathsf{Suff}\big(\mathsf{Pref}(L)\big)$ ou $\mathsf{Fact}(L) = \mathsf{Pref}\big(\mathsf{Suff}(L)\big)$ et les résultats précédents.

Question 10 Soient $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ et $\mathcal{A}' = (Q', \delta', i', F')$ des automates finis qui reconnaissent respectivement L et M. Nous allons construire un automate fini qui reconnaît $L \sqcup M$: son ensemble d'états est $Q \times Q' \times \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$; l'état initial est $(i, i', \mathbf{0})$; l'ensemble des états finals est $F \times F' \times \{\mathbf{0}\}$. Enfin, les transitions sont de deux types :

$$\begin{array}{ll}\big((q,r,\mathbf{0}),x,(q',r,\mathbf{1})\big) & \text{où} \quad (q,x,q')\in\delta \\ \big((q,r,\mathbf{1}),x,(q,r',\mathbf{0})\big) & \text{où} \quad (r,x,r')\in\delta'\end{array}$$

On vérifie sans peine que cet automate reconnaît $L \sqcup M$; l'idée est que l'on fait travailler alternativement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, selon que la troisième composante de l'état courant est $\mathbf{0}$ (on a lu un nombre pair de lettres) ou $\mathbf{1}$ (on a lu un nombre impair de lettres).

Question 11 • Sur l'alphabet $X = \{a\}$, considérons le langage $L = \{a^{2^k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. L n'est pas rationnel (preuve facile, avec le lemme de l'étoile). Il en est donc de même du langage $L' = X^* \setminus L$. Montrons que $L \cdot L' = L^* \setminus \{\varepsilon, a^3\}$, qui est rationnel. Ceci revient à prouver que tout naturel non nul peut s'écrire comme somme d'une puissance de deux et d'une non-puissance de deux. C'est clair pour $1 = 2^0 + 0$ et $2 = 2^1 + 0$. Soit maintenant $n \geqslant 4$: s'il est pair, on l'écrit $n = 2^0 + (n-1)$ avec $n - 1 \geqslant 3$; s'il est impair, on l'écrit $n = 2^1 + (n-2)$ avec $n - 2 \geqslant 3$; dans les deux cas, $n-2$ est impair, au moins égal à 3, et ne peut être une puissance de deux.

Question 12 • Soit $\mathcal{A} = (Q, X, \delta, i, F)$ un afdc reconnaissant L. Pour tout $q \in Q$, notons $I_q = \{u \in X^* : \delta^*(i,u) = q\}$ et $F_q = \{v \in X^* : \delta^*(q,v) \in F\}$. Alors $\sqrt{L} = \bigcup_{q\in Q} \big(I_q \cap F_q\big)$. En effet, si $u \in I_q \cap F_q$, alors $\delta^*(i,u^2) = \delta^*\big(\delta^*(i,u),u\big) = \delta^*(q,u) \in F$ donc $u^2 \in L$ et $u \in \sqrt{L}$. Réciproquement, soit $u \in \sqrt{L}$: $u^2 \in L$; notant $q = \delta^*(i,u)$, le calcul précédent montre que $\delta^*(q,u) \in F$ puisque $\delta^*(i,u^2) \in F$. Donc $u \in F_q$; or $u \in I_q$ par définition.

Concluons : les langages I_q et F_q sont les langages rationnels reconnus respectivement par les automates $(Q, X, \delta, i, \{q\})$ et (Q, X, δ, q, F). Ainsi, $\sqrt{L}$ est rationnel comme union finie d'intersections de rationnels (merci à Michel Quercia pour cette solution).

Question 13 • On reprend les notations de l'exercice précédent, et on définit de plus $M_{q,q'} = \{w \in X^* : \delta^*(q,w) = q'\}$. Dans ces conditions, on vérifie aisément que

$$\sqrt[n]{L} = \bigcup_{q_1,\ldots,q_{n-1}\in Q} \big(I_{q_1} \cap M_{q_1,q_2} \ldots \cap M_{q_{n-2},q_{n-1}} \cap F_{q_{n-1}}\big)$$

et on conclut de la même façon.

Question 14 • Soit $Y = \{a\}$ et φ le morphisme de X^* vers Y^* défini par $\varphi(u) = a^{|u|}$. $\varphi(L)$ est rationnel, donc l'ensemble des longueurs des mots de ce langage est ultimement périodique ; il en est de même de l'ensemble E des naturels n tels que $n = \frac{p}{q}|u|$ pour au moins un mot de L. Alors $\frac{p}{q}L = \varphi^{-1}\big(\{a^n \mid n \in E\}\big)$.

FIN