

# Option Informatique en Spé MP et MP\*

## Langages rationnels

**Question 1** ★ Un langage  $L$  contient une infinité de langages non rationnels.  $L$  peut-il quand même être rationnel?

**Question 2** ★ Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux langages non rationnels. Leur réunion peut-elle être rationnelle?

**Question 3** ★ Montrez que l'on peut décider si deux automates finis reconnaissent le même langage; vous donnerez les grandes lignes d'un algorithme.

**Question 4** ★ Soient  $L$  et  $M$  deux langages rationnels sur un même alphabet  $X$ . Décrivez un algorithme permettant de dire si  $L$  contient  $M$ .

**Question 5** ★ [F&B 4.6.6] Soit  $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$  un automate fini, non déterministe. Décrivez un algorithme permettant de décider si un mot  $u$  est reconnu par  $\mathcal{A}$ , sans déterminer  $\mathcal{A}$ .

**Question 6** ★ Soit  $\mathcal{A}$  un automate fini. Montrez que l'ensemble  $L$  des mots pour lesquels l'automate se bloque est rationnel. Vous donnerez plusieurs preuves.

**Question 7** ★ [F&B 4.4.1] Soit  $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$  un automate fini. Montrez que l'ensemble des calculs réussis de  $\mathcal{A}$  est un langage rationnel sur l'alphabet  $Q \times X \times Q$ .

**Question 8** ★★ Un langage  $L$  sur un alphabet  $X$  est *local* s'il existe des parties  $A$  et  $B$  de  $X$ , et une partie  $C$  de  $X^2$  telles que  $L = (AX^* \cap X^*B) \setminus X^*CX^*$ . Montrez que tout langage local est rationnel. Réciproquement, montrez que tout langage rationnel  $L$  sur un alphabet  $X$  est l'image d'un langage local  $M$  sur un alphabet  $Y$  par un morphisme  $\varphi$  vérifiant  $|\varphi(a)| = 1$  pour tout  $a \in Y$  (un tel morphisme est dit *strictement alphabétique*).

**Question 9** ★ [BBC 9.4] Soit  $L$  un langage rationnel. Montrez que sont également rationnels: l'ensemble  $\text{Pref}(L)$  des préfixes des mots de  $L$ ; l'ensemble  $\text{Suff}(L)$  des suffixes des mots de  $L$ ; l'ensemble  $\text{Fact}(L)$  des facteurs des mots de  $L$ . Des démonstrations variées seraient bienvenues. Que pensez-vous d'éventuelles réciproques?

**Question 10** ★★ [F & B 4.8.10] Fixons un alphabet fini  $X$ . Définissons par induction structurelle le *mélange parfait*, noté  $u \sqcup v$ , de deux mots  $u$  et  $v$  sur  $X$  de même longueur par les formules  $\varepsilon \sqcup \varepsilon = \varepsilon$  et  $(ux) \sqcup (vy) = (u \sqcup v)xy$ , où  $x$  et  $y$  sont deux lettres de  $X$ . Soient  $L$  et  $M$  deux langages sur  $X$ ; nous noterons  $L \sqcup M = \{u \sqcup v : u \in L \text{ et } v \in M \text{ et } |u| = |v|\}$ . Montrez que, si  $L$  et  $M$  sont rationnels, alors  $L \sqcup M$  est rationnel.

**Question 11** ★★ Exhibez deux langages  $L_1$  et  $L_2$  non rationnels, mais tels que le produit  $L_1 \cdot L_2$  soit rationnel.

**Question 12** ★★★ [Aut 7.7.a] Soit  $L$  un langage rationnel sur un alphabet  $X$ . Montrez que  $\sqrt{L} = \{u \in X^* : u^2 \in L\}$  est lui aussi rationnel.

**Question 13** ★★★ Soient  $L$  un langage rationnel sur un alphabet  $X$ , et  $n \geq 3$ . Montrez que  $\sqrt[n]{L} = \{u \in X^* : u^n \in L\}$  est lui aussi rationnel.

**Question 14** ★★★ Soit  $L$  un langage sur un alphabet  $X$ . Soient  $p$  et  $q$  deux naturels non nuls; notons  $\frac{p}{q}L$  l'ensemble des  $u \in X^*$  tels qu'il existe une famille  $(v_i)_{1 \leq i \leq q}$  de mots sur  $X$  ayant tous la même longueur, et vérifiant  $u = v_1 v_2 \dots v_p$  et  $v_1 v_2 \dots v_q \in L$ . Montrez que, si  $L$  est rationnel, alors  $\frac{p}{q}L$  l'est aussi.

FIN