Option Informatique en Spé MP et MP*
Profondeur des nœuds et des feuilles : le corrigé

Question 1 • $\nu(a) = \nu(g) + \nu(d) + 1$.

Question 2 • $\varphi(a) = \varphi(g) + \varphi(d) + \nu(a) - 1$ car la profondeur d'un nœud de g ou de d dans a est augmentée de 1 par rapport à sa profondeur dans ce sous-arbre, et il y a $\nu(a) - 1$ tels nœuds.

Question 3 • $\psi(a) = \psi(g) + \psi(d) + \nu(a) + 1$ pour des raisons analogues, en tenant compte du fait que le nombre de feuilles est $\nu(a) + 1$.

Question 4 • Méthode 1 : procédons par induction structurelle. Si l'arbre a est réduit à une feuille, alors $\varphi(a) = \psi(a) = \nu(a) = 0$ donc la relation est vraie. Considérons maintenant l'arbre $a = (x, g, d)$:

$$\begin{aligned}\psi(a) &= \psi(g) + \psi(d) + \nu(a) - 1 = \varphi(g) + 2\nu(g) + \varphi(d) + 2\nu(d) + \nu(a) + 1 \\ &= \varphi(a) + \nu(a) + 1 + 2(\nu(a) - 1) + \nu(a) + 1 = \varphi(a) + 2\nu(a)\end{aligned}$$

• Méthode 2 : une autre preuve par induction structurelle. La relation est vraie pour un arbre réduit à une feuille. Observons ensuite que le remplacement d'une feuille à la profondeur p par un arbre de hauteur 1 augmente $\psi(a)$ de $p+2$, $\varphi(a)$ de p et $\nu(a)$ de 1 : donc chaque membre de l'égalité augmente de $p+2$.
• Méthode 3 : plaçons deux jetons sur chaque nœud ; il y en a donc $2\nu(a)$, la somme des profondeurs des jetons est $2\varphi(a)$. Au signal, faisons glisser les deux jetons de chaque nœud, l'un sur le fils gauche, l'autre sur le fils droit. La somme des profondeurs des jetons a augmenté de $2\nu(a)$; mais elle est maintenant égale à la somme des profondeurs des nœuds autres que la racine, soit $\psi(a)$ puisque la racine est à la profondeur 0, et profondeurs des feuilles, soit $\varphi(a)$. Il vient $2\varphi(a) + 2\nu(a) = \psi(a) + \varphi(a)$, d'où l'égalité demandée.

Question 5 • Nous définirons d'abord une fonction calculant $\nu(a)$:

```
let rec nu = function
 | F -> 0
 | N(_,g,d) -> nu(g)+nu(d)+1;;

let rec phi = function
 | F -> 0
 | N(_,g,d) as a -> phi(g)+phi(d)+nu(a)-1;;

let rec psi = function
 | F -> 0
 | N(_,g,d) as a -> psi(g)+psi(d)+nu(a)+1;;
```

Cette rédaction des fonctions `phi` et `psi` est sobre, mais présente un gros inconvénient : le nombre de nœuds de chaque sous-arbre est recalculé 2^p fois, où p est la profondeur de la racine de ce sous-arbre. Il est donc préférable de procéder comme suit :

```
let rec phi_aux = function
 | F -> (0,0)
 | N(_,g,d) -> let (phi_g,nu_g) = phi_aux g and (phi_d,nu_d) = phi_aux d
   in (phi_g+phi_d+nu_g+nu_d,nu_g+nu_d+1);;

let phi a = fst (phi_aux a);;

let rec psi_aux = function
 | F -> (0,0)
 | N(_,g,d) -> let (psi_g,nf_g) = psi_aux g and (psi_d,nf_d) = psi_aux d
   in (psi_g+psi_d+nf_g+nf_d,nf_g+nf_d);;

let psi a = fst (psi_aux a);;
```

Question 6 • On commence par noter que $\nu(t_0) = 0$ et $\nu(t_{k+1}) = 2\nu(t_k) + 1$, donc $\nu(t_{k+1}) + 1 = 2(\nu(t_k) + 1)$; une récurrence immédiate donne $\nu(t_k) + 1 = 2^k(\nu(t_0) + 1) = 2^k$, doù $\nu(t_k) = 2^k - 1$. $\varphi(t_0) = 0$ et $\varphi(t_{k+1}) = 2\varphi(t_k) + \nu(t_{k+1}) - 1 = 2\varphi(t_k) + 2^{k+1} - 2$. On en déduit la relation $\dfrac{\varphi(t_{k+1})}{2^{k+1}} = \dfrac{\varphi(t_k)}{2^k} + 1 - 2^{-k}$, d'où par sommation $\dfrac{\varphi(t_k)}{2^k} = \dfrac{\varphi(t_0)}{2^0} + \sum\limits_{0 \leqslant i < k} (1 - 2^{-i}) = k - (2 - 2^{-k}) = k - 2 + 2^{-k}$. En reportant, on obtient $\varphi(t_k) = (k-2) \cdot 2^k + 2$. On obtient $\psi(t_k)$ avec la relation de la question 4 : $\psi(t_k) = \varphi(t_k) + 2\nu(t_k) = (k-2) \cdot 2^k + 2 + 2(2^k - 1) = k \cdot 2^k$; on pouvait aussi, tout simplement, remarquer que dans l'arbre t_k, il y a 2^k feuilles qui sont toutes à la profondeur k.

Question 7 • On commence par noter que $\nu(\pi_0) = 0$ et $\nu(\pi_{k+1}) = \nu(\pi_k) + 1$, donc $\nu(\pi_k) = k$. Par suite, $\varphi(\pi_0) = 0$, $\varphi(\pi_{k+1}) = \varphi(\pi_k) + \nu(\pi_k) = \varphi(\pi_k) + k$ d'où, avec une sommation immédiate : $\varphi(\pi_k) = \frac{(k-1)k}{2}$. Avec le résultat de la question 4, on en déduit $\psi(\pi_k) = \varphi(\pi_k) + 2\nu(\pi_k) = \frac{(k-1)k}{2} + 2k = \frac{k(k+3)}{2}$.

Question 8 • $p_a(x) < h_a$ quel que soit le nœud x de a ; donc, par sommation, $\varphi(a) < \nu(a)h_a$ soit $\dfrac{\varphi(a)}{\nu(a)} < h_a$. En fait, on a un peu mieux : $p_a(x) \leqslant h_a - 1$, donc $\varphi_a(x) \leqslant \nu(a)(h_a - 1) = \nu(a)h_a - \nu(a)$ soit $\varphi_a(x) < \nu(a)h_a - \nu(a) + 1$.

• Pour $i \in [\![0, h_a - 1]\!]$, il existe au moins un nœud de profondeur i ; donc $\varphi(a) \geqslant \sum\limits_{0 \leqslant i < h_a} i = \dfrac{(h_a - 1)h_a}{2}$, d'où $2\varphi(a) \geqslant (h_a - 1)h_a \geqslant (h_a - 1)^2$ puis $h_a - 1 \leqslant \sqrt{2\varphi(a)}$ soit finalement $h_a \leqslant 1 + \sqrt{2\varphi(a)}$. Notons que, pour $h_A \geqslant 2$, cette inégalité est stricte puisque l'on a alors $(h_a - 1)h_a > (h_a - 1)^2$.

Question 9 • Donnons une preuve par induction structurelle. Le résultat est banal pour l'arbre réduit à une feuille : on a alors $h_a = 0$ et $k_0 = 1$. Considérons maintenant l'arbre $a = (x, g, d)$:

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant h_a} k_j 2^{-j} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant h_a} k_j 2^{-j} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant h_g + 1} k'_{j-1} 2^{-j} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant h_d + 1} k''_{j-1} 2^{-j}$$

où k'_{j-1} (resp. k''_{j-1}) est le nombre de feuilles situées à la profondeur $j - 1$ dans l'arbre g (resp. d). Alors :

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant h_a} k_j 2^{-j} = \frac{1}{2} \sum_{0 \leqslant j \leqslant h_g} k'_j 2^{-j} + \frac{1}{2} \sum_{0 \leqslant j \leqslant h_d} k''_j 2^{-j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

• Voici une autre méthode. Nous avons dit que l'égalité était banale pour un arbre réduit à une feuille. Il est facile de voir que, si l'égalité est vraie pour un arbre t, elle l'est aussi pour l'arbre t' déduit de t en remplaçant une feuille par l'arbre : en effet, notant p la profondeur de la feuille en question, on remplace 2^{-p} par $2 \cdot 2^{-(p+1)}$. Comme on peut passer de l'arbre réduit à une feuille à un arbre quelconque, en effectuant un nombre fini de remplacements, l'égalité est vraie pour tout arbre binaire.

• Troisième méthode : on fait couler une unité de liquide dans la racine ; à chaque nœud, le flux se divise en deux parts égales. Chaque feuille à la profondeur j reçoit donc un volume 2^{-j} ; l'égalité de Kraft traduit tout simplement la conservation du volume du liquide (ce qui devrait vous faire penser aux lois de Kirchhoff).

Question 10 • Raisonnons par récurrence sur q. Si $q = 0$, alors $k_0 = 1$ et l'arbre binaire réduit à une feuille convient. Supposons le résultat acquis au rang q, et considérons une suite $(k_j)_{0 \leqslant j \leqslant q+1}$ de naturels vérifiant $\sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant q+1} k_j 2^{-j} = 1$. Alors $k_{q+1} = 2^{q+1} - \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant q} k_j 2^{q+1-j}$ est pair. Définissons la suite $(k'_j)_{0 \leqslant j \leqslant q}$ par $k'_j = k_j$ si $0 \leqslant j < q$ et $k'_q = k_q + \frac{k_{q+1}}{2}$; on a clairement $\sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant q} k'_j 2^{-j} = 1$; considérons alors un arbre binaire a possédant k'_j feuilles de profondeur j, et ce pour tout $j \in [\![0, q]\!]$; remplaçons $\frac{k_{q+1}}{2}$ de ces feuilles par l'arbre . On obtient un arbre binaire qui répond à la question.

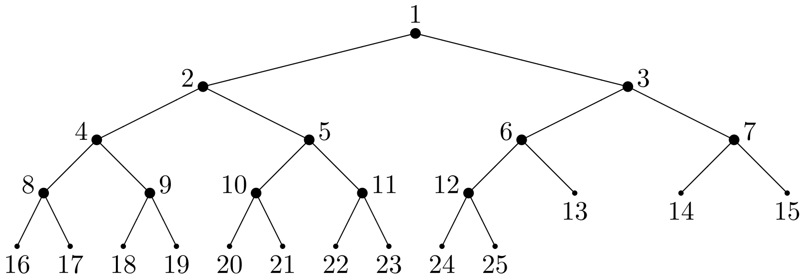
Question 11 • Notons ℓ_j le nombre de nœuds situés à la profondeur j. On a $\ell_j \leqslant 2^j$, donc $\sum\limits_{0 \leqslant j < h_a} \ell_j 2^{-j} \leqslant h_a$.

On peut aussi écrire $\sum\limits_{0 \leqslant j < h_a} \ell_j 4^{-j} < 2$.

Question 12 • Numérotons les nœuds à partir de 1, selon le parcours en largeur. Le nœud 1 (la racine) est à la profondeur $0 = \lfloor \lg(1) \rfloor$; le nœud 2 est à la profondeur $1 = \lfloor \lg(2) \rfloor$; le nœud 3 est au moins à la profondeur

$1 = \lfloor \lg(3) \rfloor$ (il peut être à la profondeur 2). Plus généralement, les nœuds de numéro compris entre 2^j inclus et $2^{j+1} - 1$ exclu sont au moins à la profondeur j : ceci revient à dire que le nœud k est au moins à la profondeur $\lfloor \lg(k) \rfloor$. On obtient le résultat demandé par sommation.

Question 13 • Et si vous écriviez un programme pour dessiner de tels arbres?



Question 14 • Reprenons la numérotation en largeur de cet arbre, déjà utilisée à la question 12 : $q = \lfloor \lg(n) \rfloor$ est la profondeur maximale des nœuds de a. Les niveaux 1 à $q-1$ de a sont tous pleins, leur contribution à la longueur de chemin interne est $\varphi(t_q) = (q-2)2^q + 2$ (d'après le résultat de la question 6). Les nœuds à la profondeur q sont numérotés de 2^q à n, leur contribution est donc $q(n - 2^q + 1)$. Ainsi $\varphi(a) = (q-2)2^q + 2 + q(n - 2^q + 1) = (n+1)q - 2^{q+1} + 2$.

FIN