Option Informatique en Spé MP et MP*
Profondeur des nœuds et des feuilles dans un arbre binaire

▶ Soit a un arbre binaire ; notons $\nu(a)$ le nombre de ses nœuds. Le nombre de ses feuilles est donc $\nu(a)+1$. Notons $\mathcal{N}(a)$ l'ensemble des nœuds de a et $\mathcal{F}(a)$ l'ensemble de ses feuilles. Notons $p_a(x)$ la profondeur d'un nœud ou d'une feuille x de cet arbre ; c'est le nombre de nœuds qu'il faut traverser pour atteindre x en partant de la racine de a. La hauteur de a est donc $h_a = \max_{f \in \mathcal{F}(a)} p_a(f)$.

▶ Notons $\varphi(a) = \sum_{n \in \mathcal{N}(a)} p_a(n)$ et $\psi(a) = \sum_{f \in \mathcal{F}(a)} p_a(f)$. $\varphi(a)$ est la *longueur de chemin interne* de l'arbre a, et $\psi(a)$ est sa *longueur de chemin externe*.

Question 1 Soit $a = (r, g, d)$ un arbre binaire non réduit à une feuille. Exprimez $\nu(a)$ en fonction de $\nu(g)$ et $\nu(d)$.

Question 2 Exprimez $\varphi(a)$ en fonction de $\varphi(g)$, $\varphi(d)$ et $\nu(a)$.

Question 3 Exprimez de même $\psi(a)$ en fonction de $\psi(g)$, $\psi(d)$ et $\nu(a)$.

Question 4 Établissez la relation $\psi(a) = \varphi(a) + 2\nu(a)$.

Question 5 Pour décrire les arbres binaires, nous définissons le type Caml suivant :

```
type 'a arbre = F | N of 'a * 'a arbre * 'a arbre;;
```

Rédigez en Caml des fonctions qui calculent φ et ψ.

Question 6 Définissons une famille $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'arbres comme suit : $t_0 = x$, $t_{k+1} = (r, t_k, t_k)$. Calculez $\varphi(t_k)$ et $\psi(t_k)$.

Question 7 On définit une famille $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'arbres comme suit : $\pi_0 = x$, $\pi_{k+1} = (r, x, \pi_k)$. Calculez $\varphi(\pi_k)$ et $\psi(\pi_k)$.

Question 8 Pour un arbre binaire a non réduit à une feuille, établissez l'encadrement :

$$\frac{\varphi(a)}{\nu(a)} < h_a \leqslant 1 + \sqrt{2\varphi(a)}$$

Question 9 Soit a un arbre binaire ; pour $0 \leqslant j \leqslant h_a$, notons k_j le nombre de feuilles dont la profondeur est j. Établissez l'égalité de Kraft :

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant h_a} k_j 2^{-j} = 1$$

Vous pourrez proposer plusieurs preuves différentes.

Question 10 Réciproquement, soit $(k_j)_{0\leqslant j\leqslant q}$ une suite de naturels vérifiant $\sum_{0\leqslant j\leqslant q} k_j 2^{-j} = 1$. Montrez qu'il existe un arbre binaire a qui possède k_j feuilles de profondeur j, et ce pour tout $j \in [\![0, q]\!]$.

Question 11 Énoncez et démontrez l'inégalité de Kraft, relative aux nœuds d'un arbre binaire.

Question 12 Montrez que, si a est un arbre binaire possédant n nœuds, alors $\varphi(a) \geqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lfloor \lg(k) \rfloor$ où lg désigne le logarithme en base 2.

▶ Considérons un *arbre binaire parfait* a possédant n nœuds : les $n+1$ feuilles de cet arbre sont à la profondeur h_a ou $h_a - 1$, et les feuilles situées à la profondeur $h_a - 1$ sont toutes «à droite». Dans un parcours en largeur de a, les nœuds sont numérotés de 1 à n, et les feuilles de $n+1$ à $2n+1$.

Question 13 Dessinez un tel arbre lorsque $n = 12$.

Question 14 Montrez que, si a est un arbre binaire parfait possédant n nœuds, $\varphi(a) = (n+1)q - 2^{q+1} + 2$, où $q = \lfloor \lg(n) \rfloor$.

FIN