

## Option Informatique en Spé MP et MP\*

### Profondeur des nœuds et des feuilles dans un arbre binaire

► Soit  $a$  un arbre binaire; notons  $\nu(a)$  le nombre de ses nœuds. Le nombre de ses feuilles est donc  $\nu(a) + 1$ . Notons  $\mathcal{N}(a)$  l'ensemble des nœuds de  $a$  et  $\mathcal{F}(a)$  l'ensemble de ses feuilles. Notons  $p_a(x)$  la profondeur d'un nœud ou d'une feuille  $x$  de cet arbre; c'est le nombre de nœuds qu'il faut traverser pour atteindre  $x$  en partant de la racine de  $a$ . La hauteur de  $a$  est donc  $h_a = \max_{f \in \mathcal{F}(a)} p_a(f)$ .

► Notons  $\varphi(a) = \sum_{n \in \mathcal{N}(a)} p_a(n)$  et  $\psi(a) = \sum_{f \in \mathcal{F}(a)} p_a(f)$ .  $\varphi(a)$  est la *longueur de chemin interne* de l'arbre  $a$ , et  $\psi(a)$  est sa *longueur de chemin externe*.

**Question 1** Soit  $a = (r, g, d)$  un arbre binaire non réduit à une feuille. Exprimez  $\nu(a)$  en fonction de  $\nu(g)$  et  $\nu(d)$ .

**Question 2** Exprimez  $\varphi(a)$  en fonction de  $\varphi(g)$ ,  $\varphi(d)$  et  $\nu(a)$ .

**Question 3** Exprimez de même  $\psi(a)$  en fonction de  $\psi(g)$ ,  $\psi(d)$  et  $\nu(a)$ .

**Question 4** Établissez la relation  $\psi(a) = \varphi(a) + 2\nu(a)$ .

**Question 5** Pour décrire les arbres binaires, nous définissons le type Caml suivant :

```
type 'a arbre = F | N of 'a * 'a arbre * 'a arbre;;
```

Rédigez en Caml des fonctions qui calculent  $\varphi$  et  $\psi$ .

**Question 6** Définissons une famille  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'arbres comme suit :  $t_0 = x$ ,  $t_{k+1} = (r, t_k, t_k)$ . Calculez  $\varphi(t_k)$  et  $\psi(t_k)$ .

**Question 7** On définit une famille  $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'arbres comme suit :  $\pi_0 = x$ ,  $\pi_{k+1} = (r, x, \pi_k)$ . Calculez  $\varphi(\pi_k)$  et  $\psi(\pi_k)$ .

**Question 8** Pour un arbre binaire  $a$  non réduit à une feuille, établissez l'encadrement :

$$\frac{\varphi(a)}{\nu(a)} < h_a \leq 1 + \sqrt{2\varphi(a)}$$

**Question 9** Soit  $a$  un arbre binaire; pour  $0 \leq j \leq h_a$ , notons  $k_j$  le nombre de feuilles dont la profondeur est  $j$ . Établissez l'égalité de KRAFT :

$$\sum_{0 \leq j \leq h_a} k_j 2^{-j} = 1$$

Vous pourrez proposer plusieurs preuves différentes.

**Question 10** Réciproquement, soit  $(k_j)_{0 \leq j \leq q}$  une suite de naturels vérifiant  $\sum_{0 \leq j \leq q} k_j 2^{-j} = 1$ . Montrez qu'il existe un arbre binaire  $a$  qui possède  $k_j$  feuilles de profondeur  $j$ , et ce pour tout  $j \in \llbracket 0, q \rrbracket$ .

**Question 11** Énoncez et démontrez l'inégalité de KRAFT, relative aux nœuds d'un arbre binaire.

**Question 12** Montrez que, si  $a$  est un arbre binaire possédant  $n$  nœuds, alors  $\varphi(a) \geq \sum_{1 \leq k \leq n} \lfloor \lg(k) \rfloor$  où  $\lg$  désigne le logarithme en base 2.

► Considérons un *arbre binaire parfait*  $a$  possédant  $n$  nœuds : les  $n + 1$  feuilles de cet arbre sont à la profondeur  $h_a$  ou  $h_a - 1$ , et les feuilles situées à la profondeur  $h_a - 1$  sont toutes «à droite». Dans un parcours en largeur de  $a$ , les nœuds sont numérotés de 1 à  $n$ , et les feuilles de  $n + 1$  à  $2n + 1$ .

**Question 13** Dessinez un tel arbre lorsque  $n = 12$ .

**Question 14** Montrez que, si  $a$  est un arbre binaire parfait possédant  $n$  nœuds,  $\varphi(a) = (n + 1)q - 2^{q+1} + 2$ , où  $q = \lfloor \lg(n) \rfloor$ .

FIN