Option Informatique en Spé MP et MP*
Mots et langages

Questions diverses

Question 1 Soit L un langage sur un alphabet A. Les langages $(L^*)^2$ et $(L^2)^*$ sont-ils égaux ?

Question 2 L, M, N désignent des langages sur un même alphabet A. Comparez $L(M+N)$ et $(LM)+(LN)$, puis $(L+M)N$ et $(LN)+(MN)$. Comparez $L(M\cap N)$ et $(LM)\cap(LN)$, puis $(L\cap M)N$ et $(LN)\cap(MN)$.

Question 3 **[Vélu 21.15]** Justifiez : $L \subset M \Rightarrow L^* \subset M^*$; $(L^*)^* = L^*$. Comparez $(LM)^*L$ et $L(ML)^*$. Comparez $(L+M)^*$, $(L+M^*)^*$, $(L^*+M^*)^*$, $(L^*M^*)^*$ et $(M^*L^*)^*$. Comparez $(L\cap M)^*$ et $(L^*)\cap(M^*)$.

Question 4 Montrez que deux mots u et v commutent si et seulement si il existe un mot w et des exposants p et q tels que $u = w^p$ et $v = w^q$.

Question 5 Soient u et v deux mots qui ne commutent pas, et $n \in \mathbb{N}$. Quel est le cardinal du langage $\{uv+vu\}^n$?

Question 6 Deux mots u et v sont *conjugués* s'il existe des mots x et y tels que $u = xy$ et $v = yx$. Montrez que la conjugaison est une relation d'équivalence. Montrez que u et v sont conjugués ssi il existe un mot w tel que $uw = wv$.

Question 7 **[Lemme d'Arden]** Soient S et T deux langages ; on suppose que S est *propre*, c'est-à-dire que ce langage ne contient pas le mot vide. Montrez que l'équation $X = SX + T$ possède une et une seule solution, qui est le langage S^*T.

Question 8 On note L le langage sur l'alphabet $X = \{a,b,c\}$ formé des mots ne contenant ni le facteur ab, ni le facteur ba. Donner une expression du nombre de mots de longueur n qui appartiennent à L.

Morphismes

▶ Une application φ de A^* dans B^* est un *morphisme* si elle vérifie $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$ quels que soient les mots u et v. Il est clair qu'un tel morphisme est parfaitement défini si l'on connaît l'image de chaque lettre de A : on aura alors $\varphi(u) = \varphi(u_1)\varphi(u_2)\dots\varphi(u_n)$, pour tout mot u de longueur $n \geqslant 1$, et $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$.

Question 1 Avec pour alphabet $A = \{a,b\}$, on considère le morphisme φ de A^* dans lui-même défini par $\varphi(a) = a$ et $\varphi(b) = ab$. Montrez que φ est injectif. Caractérisez les mots qui ne sont pas dans l'image de φ.

Question 2 Avec pour alphabet $A = \{a,b\}$, on considère les langages $L = \{u \in A^* : |u|_a = |u|_b\}$ et $M = \{u \in A^* : |u|_a = 2|u|_b\}$. Montrez qu'aucun morphisme φ de A^* dans lui-même ne vérifie $\varphi(L) = M$, mais qu'il existe un morphisme ψ tel que $L = \psi^{-1}(M)$.

Nombre de facteurs d'un mot infini

▶ On considère le mot infini $u = 010^21^2\dots0^k1^k\dots$ On se propose de déterminer le nombre $C_u(n)$ de facteurs de longueur n de u. Nous dirons qu'un facteur v de u est *spécial à droite* si $v0$ et $v1$ sont facteurs de u.

Question 1 Énumérez les facteurs de u de longueur inférieure ou égale à 3.

Question 2 Montrez que $C_u(n+1) - C_u(n)$ est le nombre de facteurs spéciaux à droite de longueur n.

Question 3 Montrez que u possède $n+1$ facteurs de longueur n spéciaux à droite et concluez.

Un langage curieux

▶ Sur l'alphabet $A = \{a,b,c,d\}$ on définit par induction structurelle un langage $\mathcal{L}$ en choisissant comme base $\mathcal{B} = \{a\}$, et comme unique constructeur φ d'arité 3, défini par $\varphi(u,v,w) = bucvdw$.

Question 1 Justifiez : $bacada$ et $bacbacadadbacada$ sont dans $\mathcal{L}$.

Question 2 Que pouvez-vous dire de la longueur d'un mot de $\mathcal{L}$?

Question 3 Soit $m \in \mathcal{L}$; écrivez deux relations entre $|m|_a$, $|m|_b$, $|m|_c$ et $|m|_d$. Exhibez quelques mots sur A vérifiant ces relations, mais n'appartenant pas à $\mathcal{L}$.

Question 4 Soit $m \in \mathcal{L}$ distinct de a. On note k le plus petit indice tel que $m_k = d$. Montrez que $5 \leqslant k < |m|$, puis que $m_{k-4}m_{k-3}m_{k-2}m_{k-1}m_k = bacad$.

FIN