Option Informatique en Spé MP et MP*
Idéaux et langages rationnnels

▶ Soit Σ un alphabet. Nous dirons qu'une partie L de Σ^* est un *idéal à droite* lorsqu'elle vérifie la condition suivante : si $u \in L$ et $x \in \Sigma$, alors $ux \in L$.

Question 1 Montrez qu'une partie L de Σ^* est un idéal à droite ssi $L = L \cdot \Sigma^*$.

Question 2 Quels sont les idéaux à droite de Σ^* lorsque $\Sigma = \{a\}$?

▶ Soient L un idéal à droite et B une partie de L. Nous dirons que B *engendre* L lorsque $L = B \cdot \Sigma^*$. Nous dirons que B est une *base* de L si elle engendre L, et si aucune partie B' strictement contenue dans B n'engendre L.

Question 3 Soient L un idéal à droite et B une partie génératrice de L. Montrez l'équivalence des deux assertions suivantes :

1. B engendre L, et aucun mot de B n'est préfixe propre d'un autre mot de B ;
2. B est une base de L.

Question 4 Soit L un idéal à droite. Notons $\mathcal{B}(L)$ l'ensemble des mots de L dont aucun préfixe propre n'est dans L. Montrez que $\mathcal{B}(L)$ est une base de L, et qu'il n'en existe pas d'autre.

▶ Nous dirons qu'un idéal L est *de type fini* si sa base est finie.

Question 5 Montrez que tout idéal à droite de type fini est rationnel.

Question 6 Exhibez un idéal à droite non rationnel.

Question 7 Existe-t-il des idéaux à droite rationnels, qui ne sont pas de type fini ?

FIN