Option Informatique en Spé MP et MP*
Un problème tiré de Combinatorics on Words : le corrigé

▶ Remarque : si un mot x possède deux suffixes u et v appartenant à W, alors $u = v$; en effet, dans le cas contraire, le plus court des deux mots u et v est suffixe, donc facteur, de l'autre, ce qui est exclu puisque tous deux sont dans W.

Question 1 • Soit $x \in X_u$: $x \in A^*u$, donc u est suffixe de x ; à plus forte raison, u est facteur de x. Supposons que x possède un facteur v appartenant à W : alors, soit $x = zvz'$ avec $z' \neq \varepsilon$, mais ceci est exclu car $x \notin A^*WA^+$; soit $x = zv$, mais alors $v = u$ d'après la remarque.

• Réciproquement, soit x ayant u pour suffixe, et n'ayant aucun autre facteur dans W. $x \in A^*u$ est clair ; et, si x appartenait à A^*WA^+, on aurait $x = zvz'$ avec $v \in W$ et $z' \neq \varepsilon$ si bien que x posséderait un autre facteur appartenant à W (à savoir, v).

Question 2 • Soit $x \in X_u \cap X_v$: u et v sont suffixes du même mot x, donc sont égaux d'après la remarque. On en déduit que $X_u \cap X_v = \emptyset$ dès que $u \neq v$.

Question 3 • $\varepsilon \in P$ car ε n'a aucun facteur dans A^+, *a fortiori* dans W. Soit $x \in PA$: $x = ya$ avec $y \in P$; si $x \notin P$, x possède un facteur dans W, qui ne peut être facteur de y. Donc $x = vwa$ avec $wa \in W$; montrons par l'absurde que x n'a pas d'autre facteur dans W. Un tel facteur z serait, soit facteur de y (exclu car $y \in P$), soit suffixe de x : mais alors $z = wa$ d'après la remarque. Conclusion : $x \in X_{wa}$. Nous avons ainsi établi l'inclusion $\{\varepsilon\} + PA \subset P + \sum\limits_{u \in W} X_u$.

• Soit $x \in P$: si $x \neq \varepsilon$, alors $x = ya$; tout facteur de y étant aussi facteur de x, on peut affirmer que $y \in P$; par suite, $x \in PA$. Soit maintenant $x \in X_u$: $x = yu$ avec $u \in W \subset A^+$, donc $u = za$ avec $a \in A$; ainsi $x = yza$. Si yz avait un facteur dans W, celui-ci serait pour x un deuxième facteur appartenant à W, ce qui est exclu. Finalement, $yz \in P$ et $x \in PA$. On a établi l'inclusion $P + \sum\limits_{u \in W} X_u \subset \{\varepsilon\} + PA$.

Question 4 • $R_{u,v} = \{b, bb\}$; en effet, b et bb conviennent ; tout autre mot de longueur inférieure à 3 contient au moins une occurrence de a, et ne peut donc convenir ; et tout mot t de longueur au moins 3 appartenant à A^*v doit avoir v comme suffixe, et ne peut lui non plus convenir.

Question 5 • Le résultat est clair si $R_{u,v}$ est vide. Sinon, soit $t \in R_{u,v}$: alors $ut \in A^*v$, *id est* : il existe $w \in A^*$ tel que $ut = wv$. Des deux mots t et v, l'un est suffixe de l'autre ; or ce ne peut être v puisque $t \notin A^*v$; donc t est suffixe propre de v ; comme v possède exactement $|v|$ suffixes propres, $R_{u,v}$ est fini, et son cardinal est au plus égal à $|v|$. En fait, il est même strictement inférieur à $|v|$ car t, appartenant à A^+, ne peut être égal à ε.

Question 6 • Raisonnons par l'absurde : soit $x \in X_u \cap (X_v R_{v,u})$. On a alors $x = yu = zvt$ avec $t \in R_{v,u}$, donc $t \neq \varepsilon$. Ainsi, x admet v comme autre facteur appartenant à W, ce qui est exclu puisque $x \in X_u$.

Question 7 • Raisonnons par l'absurde : soit $x \in (X_v R_{v,u}) \cap (X_w R_{w,u})$. On a $x = zvt = z'wt'$, avec $zv \in X_v$, $z'w \in X_w$, $t \in R_{v,u}$ et $t' \in R_{w,u}$. Si z et z' ont même longueur, alors $vt = wt'$; v et w étant distincts, le plus court des deux est suffixe, donc facteur, de l'autre, mais ceci est exclu puisque tous deux sont dans W. On peut supposer $|z| < |z'|$ pour fixer les idées ; mais alors, si $|zv| = |z'w|$, on a $zv = z'w$ avec $|w| < |v|$, si bien que w est suffixe, *a fortiori* facteur, de v, ce qui est encore exclu ; si $|zv| < |z'w|$, v est facteur de $z'w$, ce qui est exclu puisque $z'w \in X_w$; raisonnement symétrique si $|zv| > |z'w|$.

Question 8 • Soit $x \in Pu$: $x = yu$ avec $y \in P$. De deux choses l'une : ou bien x n'a aucun autre facteur appartenant à W, auquel cas $x \in X_u$. Ou bien x a au moins un autre facteur dans W ; notons v celui qui est le plus à gauche, *id est* : $x = zvw$, avec $|z|$ minimale (et, en cas d'égalité, $|w|$ maximale). zv ne peut avoir aucun facteur dans W, si bien que $zv \in X_v$; il reste à établir $w \in R_{v,u}$, soit : $w \in A^+ \setminus A^*uA^+$ et $vw \in A^*u$.

• v ne peut être suffixe de u (d'après la remarque), donc $w \neq \varepsilon$, et $w \in A^+$. Comme $v \in W$ et $y \in P$, v ne peut être facteur de y, d'où $|zv| > |y|$, et par suite $|w| < |u|$: donc $w \notin A^*u$. Supposons $|vw| < |u|$: vw serait suffixe de u, mais alors v serait facteur de u, ce qui est exclu. Ainsi $|vw| \geqslant |u|$; comme $zvw = xu$, u est suffixe de vw, et $vw \in A^*u$.

• On a ainsi établi l'inclusion de gauche à droite. Pour l'inclusion inverse, distinguons deux cas de figure.

• Soit $x \in X_u$: $x = yu$, et x n'a aucun autre facteur dans W ; comme $u \neq \varepsilon$, y n'a aucun facteur dans W, soit : $y \in P$, et $x \in Pu$.

• Soit $x \in X_v R_{v,u}$ pour un certain $v \in W$. On peut écrire $x = yvw$, yv n'ayant comme seul facteur dans W que son suffixe v, et w appartenant à $R_{v,u}$. Ainsi, $w \in A^+$, $w \notin A^*u$ et $vw \in A^*u$. u est suffixe de vw, *a fortiori* de $x = yvw$, si bien que $x \in A^*u$. Notons alors z le mot tel que $vw = zu$, si bien que $x = yzu$; il s'agit de prouver que $yz \in P$. Raisonnons par l'absurde : soit $s \in W$ un facteur de yz. Nécessairement, $|z| \geqslant |v|$, sinon $x = yzu = yvw$ implique que yz est préfixe propre de yv, donc que s est facteur de yv, autre que le v final. Mais on a aussi $|u| > |w|$, puisque $w \notin A^*u$. On met alors en évidence une contradiction :

$$|x| = |yzu| = |y| + |z| + |u| > |y| + |v| + |w| = |yvw| = |x|$$

Question 9 • D'après ce qui fut établi à la question 5, les éléments de $R_{u,u}$ doivent être des suffixes propres de u, distincts de ε ; les seuls candidats à examiner sont donc a et ba. Or a ne peut convenir puisque $ua = abaa$ n'admet pas $u = aba$ comme suffixe ; en revanche, ba convient puisque $uba = ababa$ admet $u = aba$ comme suffixe. Ainsi $R_{u,u} = \{ba\}$.

• On a $\{\varepsilon\} + PA = P + X_u$ d'après la question 3 ; $\{\varepsilon\}$ et (PA) sont clairement disjoints, de même que P et X_u, donc, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\big(A^n \cap (\{\varepsilon\} + PA)\big) &= \mathrm{Card}\big(A^n \cap \{\varepsilon\}\big) + \mathrm{Card}\big(A^n \cap PA\big) \\
&= \mathrm{Card}\big(A^{n-1} \cap P\big) \times \mathrm{Card}\, A = 2\lambda_{n-1} \\
\mathrm{Card}\big(A^n \cap (P + X_u)\big) &= \mathrm{Card}\big(A^n \cap P\big) + \mathrm{Card}\big(A^n \cap X_u\big) = \lambda_n + \mu_n
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{2\lambda_{n-1} = \lambda_n + \mu_n}$

• $P_u = X_u + X_u R_{u,u}$ d'après la question 8 ; X_u et $X_u R_{u,u}$ sont disjoints d'après la question 6 ; donc, pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\big(A^n \cap Pu\big) &= \mathrm{Card}\big(A^{n-3} \cap P\big) = \lambda_{n-3} \\
\mathrm{Card}\big(A^n \cap (X_u + X_u R_{u,u})\big) &= \mathrm{Card}\big(A^n \cap X_u\big) + \mathrm{Card}\big(A^n \cap X_u R_{u,u}\big) \\
&= \mu_n + \mathrm{Card}\big(A^{n-2} \cap X_u\big) = \mu_n + \mu_{n-2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\lambda_{n-3} = \mu_n + \mu_{n-2}}$

Question 10 • Pour $n \geqslant 3$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_n + \mu_n &= 2\lambda_{n-1} \\
\lambda_{n-2} + \mu_{n-2} &= 2\lambda_{n-3} \quad (n \to n-2) \\
\lambda_{n-3} &= \mu_n + \mu_{n-2}
\end{aligned}$$

D'où par addition $\lambda_n + \lambda_{n-2} + \lambda_{n-3} = 2\lambda_{n-1} + 2\lambda_{n-3}$, soit :

$$\boxed{\lambda_n = 2\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} + \lambda_{n-3}}$$

• Pour être exhaustifs, donnons les valeurs des premiers termes des suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, afin d'amorcer un éventuel calcul. $P \cap A^n = \emptyset$ si $n \leqslant 2$, donc $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$. Voici le compte-rendu d'une mise en œuvre avec Caml ; les questions sont précédées d'un #, les réponses ont été conservées telles quelles.

```
#let rec lambda = function
 | 0 -> 1
 | 1 -> 2
 | 2 -> 4
 | n -> 2*lambda(n-1)-lambda(n-2)+lambda(n-3);;
lambda : int -> int = <fun>
#for n = 0 to 13 do
  print_int(lambda n);
  print_char ‘ ‘ done;;
1 2 4 7 12 21 37 65 114 200 351 616 1081 1897 - : unit = ()
```

FIN