# Option Informatique en Spé MP et MP$^*$
# Un problème tiré de Combinatorics on Words

▶ On fixe un alphabet $A$. Soit $W$ une partie de $A^+$ telle qu'aucun élément de $W$ ne possède de facteur propre dans $W$.

▶ On note $P = A^* \setminus (A^*WA^*)$ : $P$ est donc l'ensemble des mots dont aucun facteur n'appartient à $W$.

▶ Soit $u \in W$ ; on note $X_u = (A^*u) \setminus (A^*WA^+)$.

▶ On note $L + M$ pour $L \cup M$, et $\sum_{i \in I} L_i$ pour $\bigcup_{i \in I} L_i$.

***Question 1*** • Justifiez : $X_u$ est l'ensemble des mots dont $u$ est suffixe, mais dont aucun autre facteur n'appartient à $W$.

***Question 2*** • Soient $u$ et $v$ deux éléments distincts de $W$. Montrez que $X_u$ et $X_v$ sont disjoints.

***Question 3*** • Établissez la relation $\{\varepsilon\} + PA = P + \sum_{u \in W} X_u$.

▶ Pour $u$ et $v$ appartenant à $W$, on note $R_{u,v} = \{t \in A^+ \setminus (A^*v) : ut \in A^*v\}$.

***Question 4*** • Explicitez $R_{u,v}$ lorsque $u = abb$ et $v = bbb$.

***Question 5*** • Montrez que $R_{u,v}$ est une partie finie de $A^+$.

***Question 6*** • Soient $u$ et $v$ deux éléments de $W$. Montrez que $X_u$ et $X_v R_{v,u}$ sont disjoints.

***Question 7*** • Soient $u$, $v$ et $w$ trois éléments de $W$. On suppose $v \neq w$ ; montrez que $X_v R_{v,u}$ et $X_w R_{w,u}$ sont disjoints.

***Question 8*** • Soit $u \in W$ ; établissez la relation $Pu = X_u + \sum_{v \in W} X_v R_{v,u}$.

▶ Dans les deux dernières questions, on fixe $A = \{a, b\}$, $u = aba$ et $W = \{u\}$. Pour $n \geqslant 0$, on note $\lambda_n = \mathrm{Card}(P \cap A^n)$ le nombre de mots de longueur $n$ n'ayant aucun facteur égal à $u$, et $\mu_n = \mathrm{Card}(X_u \cap A^n)$.

***Question 9*** • Établissez deux relations entre les familles $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

***Question 10*** • En déduire une relation de récurrence linéaire vérifiée par la famille $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

**FIN**