Option Informatique en Spé MP et MP*
Un problème tiré de Combinatorics on Words

▶ On fixe un alphabet A. Soit W une partie de A^+ telle qu'aucun élément de W ne possède de facteur propre dans W.

▶ On note $P = A^* \setminus (A^*WA^*)$: P est donc l'ensemble des mots dont aucun facteur n'appartient à W.

▶ Soit $u \in W$; on note $X_u = (A^*u) \setminus (A^*WA^+)$.

▶ On note $L + M$ pour $L \cup M$, et $\sum_{i \in I} L_i$ pour $\bigcup_{i \in I} L_i$.

Question 1 • Justifiez : X_u est l'ensemble des mots dont u est suffixe, mais dont aucun autre facteur n'appartient à W.

Question 2 • Soient u et v deux éléments distincts de W. Montrez que X_u et X_v sont disjoints.

Question 3 • Établissez la relation $\{\varepsilon\} + PA = P + \sum_{u \in W} X_u$.

▶ Pour u et v appartenant à W, on note $R_{u,v} = \{t \in A^+ \setminus (A^*v) : ut \in A^*v\}$.

Question 4 • Explicitez $R_{u,v}$ lorsque $u = abb$ et $v = bbb$.

Question 5 • Montrez que $R_{u,v}$ est une partie finie de A^+.

Question 6 • Soient u et v deux éléments de W. Montrez que X_u et $X_v R_{v,u}$ sont disjoints.

Question 7 • Soient u, v et w trois éléments de W. On suppose $v \neq w$; montrez que $X_v R_{v,u}$ et $X_w R_{w,u}$ sont disjoints.

Question 8 • Soit $u \in W$; établissez la relation $Pu = X_u + \sum_{v \in W} X_v R_{v,u}$.

▶ Dans les deux dernières questions, on fixe $A = \{a, b\}$, $u = aba$ et $W = \{u\}$. Pour $n \geqslant 0$, on note $\lambda_n = \text{Card}(P \cap A^n)$ le nombre de mots de longueur n n'ayant aucun facteur égal à u, et $\mu_n = \text{Card}(X_u \cap A^n)$.

Question 9 • Établissez deux relations entre les familles $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Question 10 • En déduire une relation de récurrence linéaire vérifiée par la famille $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

FIN