Option Informatique en Spé MP et MP*
TD : récurrence et récurrence uniforme, le corrigé

Question 1 L'une au moins des deux lettres a ou b possède une infinité d'occurrences.

Question 2 Preuve par récurrence. Nous venons de voir le cas $n = 1$. Supposons le résultat acquis au rang n. Soit v un facteur récurrent de longueur n ; l'un au moins des deux mots va et vb possède une infinité d'occurrences : ceci établit le résultat au rang $n + 1$.

Question 3 L'un au moins des deux mots a ou b est récurrent ; notons-le v^1. L'un au moins des deux mots v^1a ou v^1b est récurrent ; notons-le v^2. Supposons obtenu un facteur récurrent v^n de u, de longueur n. L'un au moins des deux mots v^na ou v^nb est récurrent, notons-le v^{n+1}. Nous construisons ainsi une suite $(v^n)_{n\geqslant 1}$ de facteurs récurrents de u ; comme v^n est préfixe de v^{n+1}, cette suite définit clairement un mot infini dont chaque v^n est le préfixe de longueur n ; et les préfixes de ce mot sont, par construction, des facteurs récurrents de u.

Question 4 Le mot infini aab^ω a pour seul facteur spécial a.

Question 5 Il suffit d'examiner le préfixe de longueur 3. aab et bba sont exclus. aaa donne a^ω ; abb donne ab^ω ; aba donne $(ab)^\omega$. Par symétrie, on obtient b^ω, ba^ω et $(ba)^\omega$.

Question 6 Réponse négative : observez le mot bab^ω. b est spécial et récurrent, mais aucun mot de longueur 2 ou plus n'est spécial.

Question 7 Réponse négative, comme le montre le mot a^ω : *tous* les facteurs sont récurrents, et même uniformément récurrents ; *aucun* n'est spécial.

Question 8 Réponse négative, comme le montre le mot $ab^2a^2b^2a^3b^2\ldots a^nb^2\ldots$: b est spécial, mais il existe des facteurs de la forme a^k avec k arbitrairement grand.

Question 9 Cette affirmation est fausse : observez le mot $babb(ba)^2(bb)^2(ba)^3(bb)^3\ldots$: b est uniformément récurrent, et c'est le seul facteur de ce type.

Question 10 Soit v un facteur de longueur $R_u(n+1)$: tous les facteurs de longueur $n+1$ de u sont facteurs de v ; il en est donc de même des facteurs de longueur n de u, si bien que $|v| = R_u(n+1)$ majore $R_u(n)$.

Question 11 Soient n et p deux naturels, avec $n \leqslant p$, et v un mot de longueur p. Le nombre de facteurs de v de longueur n est au plus égal à $p + 1 - n$. Si les $C_u(n)$ facteurs de longueur n de u apparaissent dans v, alors $p + 1 - n \geqslant C_u(n)$, soit $|v| \geqslant C_u(n) + n - 1$. Ceci implique $R_u(n) \geqslant C_u(n) + n - 1$.

FIN