Option Informatique en Spé MP et MP*
TD : autour des notions de récurrence et de récurrence uniforme

▶ *Première version de ce texte le 29 novembre 2004 ; elle était agrémentée d'une forte dose de coquilles et erreurs. Révision le 2 octobre 2005.*

▶ Dans tout le problème, Σ désigne l'alphabet $\{a,b\}$.

▶ Un *mot infini* est une fonction u de $\mathbb{N}^*$ dans Σ. Nous noterons $u = u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$; pour $1 \leqslant i \leqslant j$, nous noterons $u[i..j]$ le mot $u_i u_{i+1} \ldots u_{j-1} u_j$.

▶ Nous noterons a^ω le mot infini constitué uniquement de a. Plus généralement, si $x \in \Sigma^*$ et $y \in \Sigma^+$, nous noterons xy^ω le mot infini obtenu en concaténant une infinité d'exemplaires du mot y derrière le mot x.

▶ Un mot v (fini, non vide) de longueur ℓ est *facteur* de u s'il existe $i > 0$ tel que $v = u[i..i+\ell-1]$; chaque position i vérifiant cette propriété nous donne une *occurrence* du mot v dans u.

▶ Un facteur de u peut posséder une ou plusieurs occurrences, voire une infinité ; dans ce dernier cas, on dit que v est un facteur *récurrent*.

Question 1 Montrez que u possède au moins un facteur récurrent.

Question 2 Montrez que, pour tout $n \geqslant 1$, u possède au moins un facteur récurrent de longueur n.

Question 3 Montrez que si u possède un facteur récurrent, alors il existe un mot infini w dont chaque préfixe est un facteur récurrent de u.

▶ Soit v un facteur de u ; l'un au moins des deux mots va et vb est facteur de u. Lorsque ces deux mots sont facteurs de u, nous dirons que v est *spécial à droite* (ou, plus brièvement, *spécial*).

Question 4 Exhibez un mot infini possédant exactement un facteur spécial.

Question 5 Décrivez tous les mots infinis sans facteur spécial.

Question 6 Que pensez-vous de l'affirmation suivante : si u possède un facteur spécial récurrent, alors il en possède une infinité.

▶ Soit v un facteur récurrent de u. Nous dirons que v est *uniformément récurrent* s'il existe $N \geqslant |v|$ tel que tout facteur de u de longueur au moins égale à N contient au moins une occurrence de v. Nous noterons alors $\rho_u(v)$ le plus petit N vérifiant cette propriété.

Question 7 Un facteur uniformément récurrent est-il nécessairement spécial ?

Question 8 Un facteur spécial récurrent est-il nécessairement uniformément récurrent ?

Question 9 Supposons que u possède un facteur uniformément récurrent. En possède-t-il nécessairement plusieurs ?

▶ Nous dirons que u est *uniformément récurrent* si tous ses facteurs le sont. Les mots infinis périodiques sont des exemples simples de mots uniformément récurrents. Ce ne sont pas les seuls !

▶ Soit u un mot uniformément récurrent. Définissons $R_u : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*$ comme suit : $R_u(n)$ est la valeur maximale de $\rho_u(v)$ lorsque v décrit l'ensemble des facteurs uniformément récurrents de longueur n de u.

Question 10 Montrez que R_u est croissante.

▶ La *complexité* du mot infini u est la fonction C_u qui, à $n \geqslant 1$, associe le nombre de facteurs de longueur n de u.

Question 11 Établissez l'inégalité $R_u(n) \geqslant C_u(n) + n - 1$.

FIN