

Option Informatique en Spé MP et MP*

Centre d'un langage : le corrigé

Question 1 • Réflexivité : $u\varepsilon = u$. Antisymétrie : si $u \prec v$ et $v \prec u$, alors $|u| \leq |v|$ et $|v| \leq |u|$, donc $|u| = |v|$ puis $u = v$. Transitivité : si $u \prec v$ et $v \prec w$, il existe des mots x et y tels que $ux = v$ et $vy = w$; alors $uxy = w$, donc $u \prec w$.

• Le plus petit élément de X^* est ε : $\varepsilon \prec u$ quel que soit u , car $\varepsilon u = u$.

• Si $X = \{a\}$, l'ordre est total car, des deux mots a^p et a^q , le plus court est facteur gauche de l'autre. Si $\text{Card } A \geq 2$, l'ordre est partiel : les mots a et b ne sont pas comparables.

Question 2 • Sens direct : soit $n \in \mathbb{N}$. u est préfixe d'une infinité de mots de L ; comme il n'y a qu'un nombre fini de mots de longueur strictement inférieure à n , il existe certainement un mot v_n tel que $|v_n| \geq n$ et $u \prec v_n$.

• Réciproque : il existe un mot v_0 vérifiant $|v_0| \geq 0$ et $u \prec v_0$. Supposons acquise l'existence d'une famille $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$ de mots tels que $u \prec v_i$ quel que soit $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ et $|v_i| > |v_{i-1}|$ quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. En appliquant l'hypothèse avec $n = |v_p| + 1$, on assure l'existence d'un mot v_{p+1} tel que $|v_{p+1}| > |v_p|$ et $u \prec v_{p+1}$. On construit ainsi par récurrence une famille infinie de mots deux à deux distincts (puisque leurs longueurs sont deux à deux distinctes) et dont u est facteur gauche.

Question 3 • Tout mot $u \in \mathcal{C}(L)$ est facteur gauche d'une infinité de mots de L ; à plus forte raison, il est facteur gauche d'au moins un mot de L .

Question 4 • On note que $\mathcal{FG}(L_1) = L_1$; donc, d'après la question précédente, $\mathcal{C}(L_1) \subset L_1$. Inversement, a^n est facteur gauche de a^p pour tout $p \geq n$; donc $L_1 \subset \mathcal{C}(L_1)$. Conclusion : $\mathcal{C}(L_1) = L_1$.

• On note que $\mathcal{FG}(L_2) = L_2$; donc, d'après la question précédente, $\mathcal{C}(L_2) \subset L_2$. Inversement, $a^p b^q$ est facteur gauche de $a^p b^r$ pour tout $r \geq q$, donc $L_2 \subset \mathcal{C}(L_2)$. Conclusion : $\mathcal{C}(L_2) = L_2$.

• D'après la question précédente, $\mathcal{C}(L_3)$ est contenu dans $\mathcal{FG}(L_3) = a^* \cup \{a^p b^q \mid p \geq q\}$. Il reste à voir lesquels de ces mots conviennent. a^p est facteur gauche de $a^n b^n$ quel que soit $n \geq p$; en revanche, $a^p b^q$ est facteur gauche d'un seul mot de L_3 , à savoir $a^p b^p$. Conclusion : $\mathcal{C}(L_3) = a^* = L_1$.

Question 5 • D'après la question 3, on sait que L est contenu dans $\mathcal{FG}(L)$. On note que tout mot u de L est facteur gauche de $uub = \varphi(u, u)$; par conséquent, il appartient à $\mathcal{C}(L)$, de même que tous ses facteurs gauches. Conclusion : $\mathcal{C}(L) = \mathcal{FG}(L)$.

Question 6 • Ceci est une propriété générale des applications.

Question 7 • Ceci est une propriété générale des applications.

Question 8 • Sur l'alphabet $X = \{a, b, c\}$ considérons $L = a^* b b^*$ et $M = a^* c c^*$. $L \cap M = \emptyset$, donc $\mathcal{C}(L \cap M) = \emptyset$. Montrons que $\mathcal{C}(L) = a^* \cup L$; par raison de symétrie, on aura $\mathcal{C}(M) = a^* \cup M$, et donc $\mathcal{C}(L) \cap \mathcal{C}(M) = (a^* \cup L) \cap (a^* \cup M) = a^*$. D'après la question 3, on sait que $\mathcal{C}(L)$ est contenu dans $\mathcal{FG}(L) = a^* \cup L$; réciproquement, a^p est facteur gauche de $a^p b^q$ quel que soit $q > 0$; et $a^p b^q$ est facteur gauche de $a^p b^r$ pour tout $r \geq q$; conclusion : $\mathcal{C}(L) = a^* \cup L$.

Question 9 • Soit u un facteur gauche d'un mot $v \in \mathcal{C}(L)$: v est donc facteur gauche d'une infinité de mots de L . Par transitivité, il en est de même de u , donc $u \in \mathcal{C}(L)$.

Question 10 • Considérons l'ensemble des mots de la forme ux , avec $x \in X$. Chacun de ces mots est facteur gauche de zéro, un ou plusieurs mots de L . Si nous notons $S_L(u)$ l'ensemble des mots de $L \setminus \{u\}$ dont u est facteur gauche, nous aurons $S_L(u) = \bigcup_{x \in X} S_L(ux)$. $S_L(u)$ étant infini, l'un au moins des ensembles $S_L(ux)$ est infini : le mot ux correspondant est alors dans $\mathcal{C}(L)$.

Question 11 • Si $\mathcal{C}(L)$ est non vide, alors L est infini ; cette dernière assertion est à plus forte raison vraie si $\mathcal{C}(L)$ est infini. Réciproquement, supposons L infini ; clairement, $\varepsilon \in \mathcal{C}(L)$. Mais le résultat de la question 10 montre que $\mathcal{C}(L)$ est infini, puisque tout mot de $\mathcal{C}(L)$ est facteur gauche propre d'un autre mot de $\mathcal{C}(L)$.

Question 12 • Soit $v \in \varphi(\mathcal{C}(L))$: $v = \varphi(u)$, avec $u \in \mathcal{C}(L)$. u est donc facteur gauche de chaque membre d'une famille infinie $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mots de L . Comme φ conserve la longueur, la famille $(\varphi(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de mots de $\varphi(L)$ est infinie. De plus, $\varphi(u)$ est facteur gauche de chaque mot de cette famille : en effet, comme u est facteur gauche de w_n , il existe un mot x_n tel que $ux_n = w_n$; alors $\varphi(u)\varphi(x_n) = \varphi(w_n)$. Ceci montre que $\varphi(u)$ appartient à $\mathcal{C}(\varphi(L))$.

• Prouvons maintenant l'inclusion inverse. Commençons par une remarque cruciale : si un mot v de longueur p est facteur gauche de $\varphi(w)$, alors $v = \varphi(x)$ où x est le facteur gauche de longueur p de w . Soit alors $v \in \mathcal{C}(\varphi(L))$: v est facteur gauche de chaque membre d'une famille infinie $(\varphi(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de mots de $\varphi(L)$. D'après la remarque, il existe un mot x tel que $\varphi(x) = v$, et qui est facteur gauche de chaque membre de la famille infinie $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mots de L ; donc $x \in \mathcal{C}(L)$ et par suite $v \in \varphi(\mathcal{C}(L))$.

Question 13 • La finitude de X sert dans les questions 10 et 11.

FIN