# Option Informatique en Spé MP et MP$^*$
# Centre d'un langage

► Texte adapté du problème 5 du livre *Langages algébriques*, de Jean-Michel Autebert (Masson éd.).

► Soit $X$ un alphabet fini. Nous dirons que $u \in X^*$ est *préfixe* (ou *facteur gauche*) de $v \in X^*$, et nous noterons $u \prec v$, s'il existe $w \in X^*$ tel que $uw = v$. Nous noterons $\mathcal{FG}(v)$ l'ensemble des facteurs gauches du mot $v$ ; si $L$ est un langage sur $X$, l'ensemble des facteurs gauches des éléments de $L$ sera noté $\mathcal{FG}(L)$ :

$$\mathcal{FG}(L) = \bigcup_{v \in L} \mathcal{FG}(v)$$

► Soit $a \in X$ ; $a^n$ est le mot de longueur $n$, constitué de $n$ occurrences de la lettre $a$ ; nous noterons $a^* = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

***Question 1*** • Vérifiez que $\prec$ est une relation d'ordre sur $X^*$ ; quel est le plus petit élément ? Dans quel(s) cas est-ce une relation d'ordre total ?

► Soit $L$ un langage sur $X$ ; nous appellerons *centre* de $L$, et noterons $\mathcal{C}(L)$, l'ensemble des mots sur $X$ qui sont facteurs gauches d'une infinité d'éléments de $L$. En conséquence, le centre d'un langage fini est vide !

***Question 2*** • Montrez qu'un mot $u$ appartient à $\mathcal{C}(L)$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins un mot $v_n$ de $L$, de longueur au moins égale à $n$, et dont $u$ est préfixe.

***Question 3*** • Montrez que $\mathcal{C}(L)$ est une partie de $\mathcal{FG}(L)$.

***Question 4*** • Explicitez le centre de chacun des langages $L_1 = a^*$, $L_2 = a^*b^*$ et $L_3 = \{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

***Question 5*** • Dans cette question uniquement, $X = \{a, b\}$ ; définissons $L$ par induction structurelle, en prenant comme base $\mathcal{B} = \{a\}$ et comme unique constructeur $K = \{(\varphi, 2)\}$ où $\varphi(u, v) = uvb$. Quel est le centre de $L$ ?

***Question 6*** • Justifiez l'affirmation suivante : si $L \subset M$, alors $\mathcal{C}(L) \subset \mathcal{C}(M)$.

***Question 7*** • Établissez l'égalité $\mathcal{C}(L \cup M) = \mathcal{C}(L) \cup \mathcal{C}(M)$.

***Question 8*** • Prouvez l'inclusion $\mathcal{C}(L \cap M) \subset \mathcal{C}(L) \cap \mathcal{C}(M)$ et montrez qu'elle peut être stricte.

***Question 9*** • Justifiez l'égalité $\mathcal{FG}(\mathcal{C}(L)) = \mathcal{C}(L)$.

***Question 10*** • Soit $u \in \mathcal{C}(L)$ ; montrez qu'il existe $x \in X$ tel que $ux \in \mathcal{C}(L)$.

***Question 11*** • En déduire que $\mathcal{C}(L)$ est infini si et seulement si $L$ est infini.

► Soient $Y$ un autre alphabet et $\varphi$ une fonction de $X$ dans $Y$. Cette fonction se prolonge naturellement en un morphisme de $X^*$ dans $Y^*$ en posant :

$$\varphi(a_1a_2 \dots a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n)$$

Définissons alors $\varphi(L)$ comme à l'accoutumée lorsque $L \subset X^*$.

***Question 12*** • Montrez que $\varphi(\mathcal{C}(L)) = \mathcal{C}(\varphi(L))$.

***Question 13*** • Parmi les résultats généraux établis précédemment, quels sont ceux qui deviennent faux si l'alphabet $X$ est infini ?

**FIN**