Option Informatique en Spé MP et MP*
Algorithmes et complexité

Rappel : il existe un algorithme de tri capable de trier une liste de n éléments en effectuant $\mathcal{O}\big(n\lg(n)\big)$ comparaisons.

Question 1 $\star\star$ Une boîte contient n boulons et n écrous ; chaque boulon peut être apparié avec un et un seul écrou ; les diamètres des boulons sont tous différents. Comment trouver le boulon de plus petit diamètre, en effectuant au plus $2n-2$ comparaisons entre un boulon et un écrou ? (Parberry 612)

Question 2 Le jeune Marcel-Paul Gardien de la Montagne a semé une belle pagaille dans la boîte d'échantillons de son père, représentant en quincaillerie : celle-ci contenait n couples (boulon,écrou) avant la catastrophe. Maintenant, il y a n boulons et n écrous en vrac. Il s'agit de reformer les couples, sachant que l'on ne peut pas comparer deux écrous, ni comparer deux boulons ; on peut seulement comparer un boulon et un écrou, et dire si celui-ci est trop petit, trop grand, ou du même calibre que celui-là. Décrivez une stratégie résolvant ce problème et dont le coût en moyenne est un $\mathcal{O}\big(n\ln(n)\big)$.

Question 3 $\star\star$ Soit f une fonction de l'intervalle discret $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. Décrivez un algorithme déterminant la plus grande partie R de $[\![1,n]\!]$ telle que $f(R)=R$, et ce pour un coût $\mathcal{O}(n)$. (Parberry 657)

Question 4 Soit S un ensemble de n relatifs. Décrivez un algorithme exhibant un relatif n'appartenant pas à S, pour un coût $\mathcal{O}(n)$. Montrez que le coût d'un tel algorithme est nécessairement un $\Omega(n)$. (Manber 6.21)

Question 5 Soient $x\in\mathbb{N}$ et S un ensemble de n naturels. Décrivez un algorithme décidant s'il existe deux éléments de S dont la somme est égale à x, pour un coût $\mathcal{O}(n\ln n)$. (Manber 6.22a)

Question 6 Soient $x\in\mathbb{N}$, S et T deux ensembles de naturels. Décrivez un algorithme décidant s'il existe un élément de S et un élément de T dont la somme est égale à x, pour un coût $\mathcal{O}(n\ln n)$, où $n=|S|+|T|$. (Manber 6.23)

Question 7 Soit $u:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. On suppose que u est croissante, et qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $k>n$ implique $u_k=+\infty$. Décrivez un algorithme décidant si un naturel p donné appartient à $\{u_0,u_1,\ldots,u_n\}$ en effectuant $\mathcal{O}\big(\lg(n)\big)$ comparaisons. Vous noterez que la valeur de n n'est pas connue. (Baase 1.34)

Question 8 $\star\star$ On dispose d'un lot de n pièces d'apparence identique ; l'une d'elles est fausse, on sait qu'elle est plus légère que les autres. Décrivez un algorithme permettant de déterminer la pièce fausse au moyen d'une balance de Roberval. Notant u_n le nombre maximal de pesées que requiert votre algorithme, donnez une expression simple de u_n ; vous ferez intervenir les fonctions «partie entière supérieure» et «logarithme en base 3». Votre algorithme est-il optimal ? (Baase 1.33)

Question 9 $\star\star$ Même question, mais cette fois on sait seulement que la pièce fausse a un poids *différent* de celui des autres pièces.

Question 10 Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n}$ une famille de $2n$ naturels. Décrivez un algorithme associant ces naturels deux à deux, de façon à minimiser la plus grande somme d'une paire, et ce pour un coût $\mathcal{O}(n\ln n)$. (Manber 6.26)

Question 11 On dispose d'un lot de circuits intégrés identiques, dont certains sont défectueux. Ces circuits sont capables de se tester mutuellement : on place deux circuits sur le testeur ; un circuit en bon état indique si l'autre est ou non défectueux ; un circuit défectueux donne une indication aléatoire. Sachant que moins de la moitié des circuits sont défectueux, quelle stratégie proposez-vous pour isoler un circuit en bon état ? (CLR 4.7)

Question 12 Il est bien connu que, dans le jeu des tours de Hanoï, la solution minimale pour déplacer une pile de n disques de l'aiguille 1 vers l'aiguille 3 requiert 2^n-1 déplacements. Mais qu'en est-il si l'on interdit les déplacements directs entre l'aiguille 1 et l'aiguille 3 ? (Parberry 357)

Question 13 Soient $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux listes de réels positifs ou nuls. Proposez un algorithme qui, pour un coût $\mathcal{O}\big(n\lg(n)\big)$, calcule $\max\limits_{s\in S_n}\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i y_{s(i)}$, où S_n désigne le groupe des permutations de l'intervalle discret $[\![1,n]\!]$. (Y.D.)

Question 14 Soit $(u_1,\ldots,u_n)$ une liste d'entiers. Proposez un algorithme dont le coût (en temps comme en espace) est un $\mathcal{O}(n)$, pour décider si cette liste, une fois triée, est arithmétique.

Question 15 $\star\star$ Encore les tours de Hanoï... Proposez un algorithme pour résoudre le problème avec quatre aiguilles et n disques. Son coût devra être un $o(2^n)$, bien entendu.

FIN