Option Informatique en Spé MP et MP*
Outils pour l'étude de la complexité des algorithmes

Lectures conseillées : *Concrete Mathematics* ; chapitres VII à IX de *Mathématiques pour l'informatique* ; chapitres 1 et 2 des *Éléments d'algorithmique* ; et bien entendu l'*Introduction à l'Analyse des Algorithmes*, par Flajolet et Sedgewick.

Exercices variés

Question 1 Comparez les suites de termes généraux respectifs $u_n = n^{\ln(n)}$ et $v_n = \big(\ln(n)\big)^n$.

Question 2 Deux suites (u_n) et (v_n) vérifient $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. A-t-on $e^{u_n} = \mathcal{O}(e^{v_n})$?

Question 3 Un(e) de vos camarades énonce l'affirmation suivante :

$$\boxed{\text{le coût de cet algorithme est donc au moins un } \mathcal{O}(n^2)}$$

Qu'en pensez-vous ?

Question 4 Une suite (u_n) de naturels vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Sans chercher une expression explicite de u_n, exhibez r tel que $u_n = \mathcal{O}(r^n)$.

Question 5 Soit $f : x \geqslant 0 \mapsto \sqrt{x}$; notos $f^{(k)}$ sa k-ième itérée et $f^*(x)$ le plus petit exposant $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(x) \leqslant 2$. Estimez $f^*(x)$ au moyen d'un $\mathcal{O}$.

Question 6 Notons $f(n)$ la somme des exposants mis en jeu dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers. Comparer $f(n)$ et $\lg(n)$.

Question 7 Existe-t-il un exposant k tel que $\lfloor \ln(n) \rfloor ! = \mathcal{O}\big(n^k\big)$?

Logarithme itéré

► Notons $\lg(x)$ le logarithme de x en base 2, $\lg^{(k)}$ son k-ième itéré, et $\lg^*(x)$ le plus petit exposant $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lg^{(k)} x \leqslant 0$.

Question 8 Quel est le plus grand réel x tel que $\lg^*(x) = 4$?

Question 9 Calculer $\lg^*\big(10^{90}\big)$.

Question 10 Quelle est la limite de $\lg^*(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Question 11 Comparez les suites de termes généraux respectifs $u_n = \lg^*\big(\lg(n)\big)$ et $v_n = \lg\big(\lg^*(n)\big)$.

La fonction 91 de McCarthy

Question 12 Dans un papier intitulé *Textbook Examples of Recursion*, Donald KNUTH nous dit :

> It is appropriate to begin by studying the 91 function, because 1991 is the year of John McCARTHY's 64th birthday (and because a computer scientist's most significant birthday is the 64th).

Vous étudierez donc la fonction 91 de McCARTHY (il ne s'agit pas du sénateur de sinistre mémoire, mais de l'inventeur du langage de programmation LISP), fonction définie par :

$$f(x) = \textbf{ if } x > 100 \textbf{ then } x - 10 \textbf{ else } f\big(f(x+11)\big)$$

FIN