Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir surveillé du jeudi 6 décembre 2007 : le corrigé

Deux opérateurs intéressants

Question 1 $\mu(L)$ est l'ensemble des mots de la forme $\mathbf{1}^a\mathbf{0}\mathbf{1}^b\mathbf{0}\mathbf{1}^c\mathbf{0}$. En effet, ces mots appartiennent clairement à L ; et un préfixe propre du mot $\mathbf{1}^a\mathbf{0}\mathbf{1}^b\mathbf{0}\mathbf{1}^c\mathbf{0}$ contient au plus deux lettres $\mathbf{0}$, donc n'appartient pas à L.

D'autre part, $\pi(L) = \emptyset$; en effet, tout mot u est préfixe propre de $u\mathbf{000}$, or ce dernier appartient à L.

Question 2 Si $\varepsilon \in L$, alors $\mu(L) = \emptyset$. Sinon, soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini déterministe complet reconnaissant L. Soit $\omega \notin F$; définissons un nouvel automate $\mathcal{A}' = (Q', \Delta, i', F')$ comme suit :

- $Q' = (Q \times \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}) \cup \{\omega\}$;
- $\Delta\big((q,k),0\big) = \big(\delta(q,0),k\big)$ si $\delta(q,x) \notin F$; $\Delta\big((q,0),x\big) = \big(\delta(q,x),1\big)$ si $\delta(q,x) \in F$; $\Delta\big((q,1),x\big) = \omega$ si $\delta(q,x) \in F$; $\delta(\omega,x) = \omega$;
- $i' = (i,0)$;
- $F' = F \times \{1\}$.

Il est clair que cet automate est déterministe et complet. Soit $u \in \mu(L)$, de longueur $n \geqslant 1$.

Supposons que u appartient à $\mu(L)$; alors il appartient à L, donc il est l'étiquette du calcul réussi de $\mathcal{A}$ suivant :

$$q_0 \xrightarrow{u_1} q_1 \xrightarrow{u_2} q_2 \xrightarrow{u_3} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{u_n} q_n$$

Nous avons $q_0 = i$ et, comme aucun préfixe propre de u n'est dans L, le seul état final visité est le dernier, soit q_n. Le même mot u est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}'$, qui est :

$$(q_0,0) \xrightarrow{u_1} (q_1,0 \xrightarrow{u_2} (q_2,0) \xrightarrow{u_3} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} (q_{n-1},0) \xrightarrow{u_n} (q_n,1)$$

Ce calcul commence en $i' = (i,0)$, puis passe par les états $(q_k,0)$ pour $k \in [\![1,n-1]\!]$ et se termine dans l'état $(q_n,1)$, lequel est final. Ce calcul est donc réussi, et par suite u est reconnu par $\mathcal{A}'$.

Supposons maintenant u reconnu par $\mathcal{A}'$. u est l'étiquette d'un calcul réussi de $\mathcal{A}'$. Ce calcul commence en $i' = (i,0)$, passe par $n-1$ états intermédiaires $(q_k,0)$ avec $1 \leqslant k < n$, et se termine par une transition menant de $(q_{n-1},0)$ à $(q_n,1) \in F'$: en particulier, $q_n \in F$. LE calcul a l'allure suivante :

$$(i,0) \xrightarrow{u_1} (q_1,0 \xrightarrow{u_2} (q_2,0) \xrightarrow{u_3} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} (q_{n-1},0) \xrightarrow{u_n} (q_n,1)$$

Le même mot u est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ qui commence en i, passe par les états $q_1, \ldots, q_{n-1}$ et se termine par une transition menant de q_{n-1} à q_n. Mais ce dernier état est final, donc ce calcul est donc réussi, et par suite u appartient à L. De plus, comme aucun des états (sauf le dernier) n'est final, aucun préfixe propre de u n'est dans L : donc u appartient à $\mu(L)$.

Nous venons de montrer que tout mot de $\mu(L)$ est reconnu par $\mathcal{A}'$, puis que tout mot reconnu par $\mathcal{A}'$ est dans $\mu(L)$. Ceci prouve de $\mu(L)$ est rationnel.

Question 3 Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini déterministe complet reconnaissant L. Pour chaque état final f de $\mathcal{A}$, notons $\tau(f)$ l'ensemble des $\delta(f,w)$ où w parcourt Σ^+. L'algorithme de parcours en largeur d'un graphe permet de déterminer chaque $\tau(f)$. Définissons un nouvel automate $\mathcal{A}_\pi = (Q, \delta, i, F_\pi)$ où F_π est l'ensemble des états finals de $\mathcal{A}$ tels que $\tau(f)$ soit vide.

Soit $u \in \pi(L)$: u est reconnu par L, donc il est l'étiquette d'un calcul réussi de $\mathcal{A}$, qui se termine dans un état $f \in F$. Comme u n'est préfixe propre d'aucun mot de L, nous pouvons affirmer qu'il n'existe aucun mot w non vide tel que $uw \in L$; ceci revient à dire que le seul calcul de $\mathcal{A}_\pi$ commençant en f et finissant dans un état final de $\mathcal{A}_\pi$ est celui d'étiquette ε : ainsi, $f \in F_\pi$. Le même mot u est donc l'étiquette d'un calcul réussi de $\mathcal{A}_\pi$, si bien que u est reconnu par $\mathcal{A}_\pi$.

Soit maintenant u reconnu par $\mathcal{A}_\pi$: u est l'étiquette d'un calcul réussi de $\mathcal{A}_\pi$, qui commence en i et se termine dans un état $f \in F_\pi$; il est clair que u est aussi l'étiquette du même calcul, effectué dans $\mathcal{A}$, et qui est lui aussi réussi. Donc $u \in L$. Il nous reste à montrer que u n'est préfixe propre d'aucun mot de L.

Soit $v \in \Sigma^+$: uv est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}_\pi$ qui commence en i, passe par $f \in F_\pi$ (après lecture de u), et se termine dans un état g (après lecture de v). Par définition de F_π, cet état g ne peut pas appartenir à F. Ce calcul existe aussi dans $\mathcal{A}$, et se termine également en g, donc uv n'est pas reconnu par $\mathcal{A}$.

Nous venons de montrer que tout mot de $\pi(L)$ est reconnu par $\mathcal{A}_\pi$, puis que tout mot reconnu par $\mathcal{A}_\pi$ est dans $\pi(L)$. Ceci prouve de $\pi(L)$ est rationnel.

▶ Suggestion : soient L un langage rationnel, et $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini déterministe le reconnaissant. Notons M l'ensemble des mots u qui sont l'étiquette d'un calcul réussi de $\mathcal{A}$ passant par *au moins* un autre état final de $\mathcal{A}$. Le langage M est-il rationnel ?

▶ L'idée provient du livre de Michael Sipser *Introduction to the Theory of Computation* ; on y trouve pplusieurs exercices (sur les automates finis), passablement durs !

Langages rationnels et automates finis

Question 1 Il suffit de remarquer que, si l'automate est placé dans l'état q et lit le chiffre **0** (resp. **1**), alors il passe dans l'état $2q \mod 5$ (resp. $2q+1 \mod 5$). De plus, l'unique état final est 1.

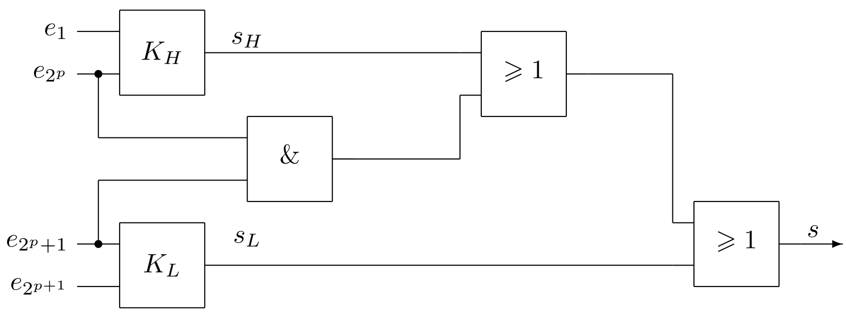
Circuits logiques

Question 1 Nous avons $s = 1$ ssi $a_1 = a_2 = 1$, donc $\mathcal{T}_1$ est une porte ET.

Question 2 Soint K_L et K_H deux circuits $\mathcal{T}_p$. Notons $e_1, \ldots, e_{2^p}$ les entrées de K_L et $e_{2^p+1}, \ldots, e_{2^{p+1}}$ celles de K_H. Notons s_L et s_H les sorties de K_L et K_H, et s celle du circuit $\mathcal{T}_{p+1}$ à construire. Nous aurons $s = 1$ ssi $s_L = 1$ ou $s_H = 1$ ou $s_{2^p} = s_{2^p+1} = 1$; ce que nous résumons par la forumle :

$$s = s_L \vee s_H \vee (s_{2^p} \wedge s_{2^p+1})$$

Ceci nous donne le circuit suivant :



Question 3 Nous avons $C_1 = 1$ et $C_{p+1} = 2C_p + 3$; nous en déduisons $C_p = 2^{p+1} - 3$.

Question 4 Nous avons $D_1 = 1$ et $D_{p+1} = D_p + 2$; donc $D_p = 2p - 1$.

▶ Source : idée piquée dans un sujet de mon collègue Stéphane G.

FIN