Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir surveillé du jeudi 6 décembre 2007
Trois exercices indépendants

1 Deux opérateurs intéressants

▶ Nous dirons que le mot u est un *préfixe propre* du mot v s'il existe un mot x non vide tel que $ux = v$. Soit L un langage quelconque ; nous noterons $\mu(L)$ l'ensemble des mots de L dont aucun préfixe propre n'appartient à L ; et $\pi(L)$ l'ensemble des mots de L qui ne sont préfixe propre d'aucun mot de L.

Question 1 Dans cette question, $\Sigma = \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ et L est l'ensemble des mots sur Σ qui contiennent au moins trois occurrences de la lettre $\mathbf{0}$. Explicitez $\mu(L)$ et $\pi(L)$; vous donnerez une preuve rigoureuse.

▶ Dans les deux questions suivantes, L est un langage rationnel quelconque.

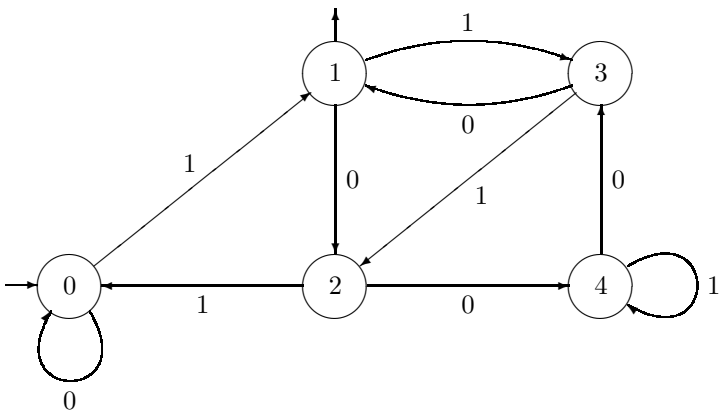
Question 2 Montrez que $\mu(L)$ est rationnel.

Question 3 Montrez que $\pi(L)$ est rationnel.

2 Langages rationnels et automates finis

▶ Dans cet exercice, Σ désigne l'alphabet $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$. Soit $u = u_n u_{n-1} \dots u_0$ un mot non vide sur Σ ; nous lui associons $\mu(u) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} 2^k u_k$, qui est le naturel représenté par u en base 2. Notons L l'ensemble des mots u sur Σ qui vérifient $\mu(u) \equiv 1 \pmod 5$.

Question 1 Montrez que l'automate $\mathcal{A}$ décrit ci-dessous reconnaît le langage L.



3 Circuits logiques

▶ Nous concevons un circuit logique $\mathcal{T}_p$, possédant 2^p entrées $e_1, \dots, e_{2^p}$ et une sortie s. La sortie vaut 1 si et seulement si il existe un $i \in [\![1, 2^p - 1]\!]$ tel que $e_i = e_{i+1} = 1$.

Question 1 Construisez $\mathcal{T}_1$.

Question 2 Montrez comment construire $\mathcal{T}_{p+1}$ à partir de deux exemplaires de $\mathcal{T}_p$, et d'une ou plusieurs portes logiques élémentaires.

Question 3 Notons C_p le nombre de portes élémentaires requises pour construire $\mathcal{T}_p$, avec la stratégie exposée à la question précédente. Donnez l'expression exacte de C_p en fonction de p.

Question 4 Notons D_p le *délai* associé au circuit $\mathcal{T}_p$, c'est-à-dire le nombre maximal de portes élémentaires traversées par un signal, de l'entrée e_i jusqu'à la sortie s. Donnez une expression simple de D_p en fonction de p.

FIN