

Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir surveillé du jeudi 6 décembre 2007
Trois exercices indépendants

1 Deux opérateurs intéressants

► Nous dirons que le mot u est un *préfixe propre* du mot v s'il existe un mot x non vide tel que $ux = v$. Soit L un langage quelconque ; nous noterons $\mu(L)$ l'ensemble des mots de L dont aucun préfixe propre n'appartient à L ; et $\pi(L)$ l'ensemble des mots de L qui ne sont préfixe propre d'aucun mot de L .

Question 1 Dans cette question, $\Sigma = \{0,1\}$ et L est l'ensemble des mots sur Σ qui contiennent au moins trois occurrences de la lettre 0 . Explicitez $\mu(L)$ et $\pi(L)$; vous donnerez une preuve rigoureuse.

► Dans les deux questions suivantes, L est un langage rationnel quelconque.

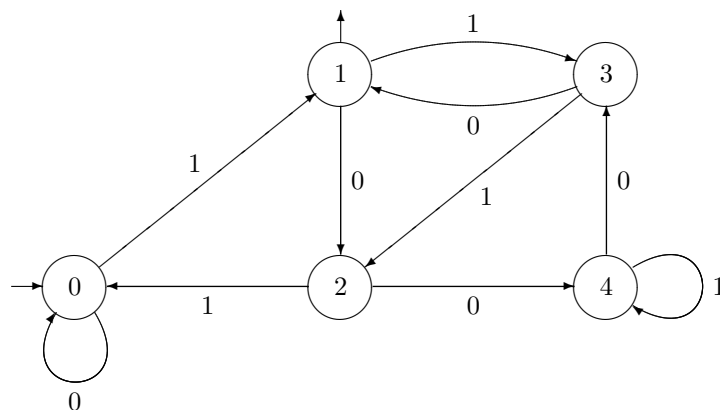
Question 2 Montrez que $\mu(L)$ est rationnel.

Question 3 Montrez que $\pi(L)$ est rationnel.

2 Langages rationnels et automates finis

► Dans cet exercice, Σ désigne l'alphabet $\{0,1\}$. Soit $u = u_n u_{n-1} \dots u_0$ un mot non vide sur Σ ; nous lui associons $\mu(u) = \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k u_k$, qui est le naturel représenté par u en base 2. Notons L l'ensemble des mots u sur Σ qui vérifient $\mu(u) \equiv 1 \pmod{5}$.

Question 1 Montrez que l'automate \mathcal{A} décrit ci-dessous reconnaît le langage L .



3 Circuits logiques

► Nous concevons un circuit logique \mathcal{T}_p , possédant 2^p entrées e_1, \dots, e_{2^p} et une sortie s . La sortie vaut 1 si et seulement si il existe un $i \in [1, 2^p - 1]$ tel que $e_i = e_{i+1} = 1$.

Question 1 Construisez \mathcal{T}_1 .

Question 2 Montrez comment construire \mathcal{T}_{p+1} à partir de deux exemplaires de \mathcal{T}_p , et d'une ou plusieurs portes logiques élémentaires.

Question 3 Notons C_p le nombre de portes élémentaires requises pour construire \mathcal{T}_p , avec la stratégie exposée à la question précédente. Donnez l'expression exacte de C_p en fonction de p .

Question 4 Notons D_p le *délat* associé au circuit \mathcal{T}_p , c'est-à-dire le nombre maximal de portes élémentaires traversées par un signal, de l'entrée e_i jusqu'à la sortie s . Donnez une expression simple de D_p en fonction de p .

FIN