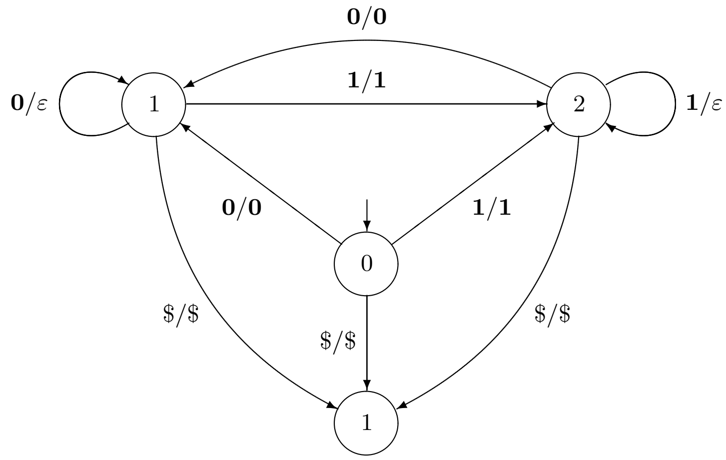
Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir à rendre après les vacances de Noël : le corrigé

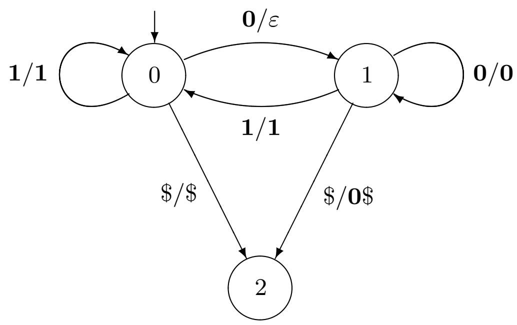
Transducteurs rationnels

Question 1 **11101011**\$.

Question 2 Il s'agit de recopier la première lettre de chaque bloc, et d'ignorer les suivantes.



Question 3 On saute le premier **0** de chaque bloc de **0** ; le fait d'être alors dans l'état 2 sert à mémoriser le **0** sauté, qu'il conviendra d'écrire sur la sortie si l'on est en train de lire le dernier bloc de **0**.



Question 4 Chaque transition qui efface un caractère mène à l'état 1 ; or, lorsque l'on sort de cet état, on écrit deux caractères sur la bande de sortie. Tout calcul se termine dans l'état 3 ; donc on sort de l'état 2 autant de fois qu'on y entre. Conclusion : le mot de sortie a la même longueur que le mot d'entrée. C'est la loi de Kirchhoff pour les nœuds !

Question 5 La lecture de $\mathbf{0}^p$ provoque l'écriture de $\mathbf{0}^{p-1}$ et mène à l'état 1 ; ensuite, la lecture de $\mathbf{1}^q$ provoque l'écriture de $\mathbf{101}^{q-1}$, qui se termine dans l'état 2. Enfin, la lecture du \$ provoque l'écriture d'un \$ et mène à l'état 3. Donc $\kappa(\mathbf{0}^p\mathbf{1}^q\$) = \mathbf{0}^p\mathbf{101}^{q-1}\$$.

Question 6 On passe de u à $\kappa(u)$ en remplaçant chaque facteur **01** par le facteur **10**.

Question 7 Le résultat est clair si $u = \mathbf{1}^q\$$. Sinon, $u = \mathbf{1}^{q_0}\mathbf{0}^{p_1}\mathbf{1}^{q_1}\mathbf{0}^{p_2}\mathbf{1}^{q_2}\ldots\mathbf{0}^{p_k}\mathbf{1}^{q_k}\$$, où les exposants sont strictement positifs sauf peut-être q_0 et/ou q_k. Le bloc initial de **1** (éventuellement vide) est recopié tel quel sur la sortie ; le transducteur est toujours dans l'état 0. Ensuite, chaque bloc $\mathbf{0}^{p_i}\mathbf{1}^{q_i}$ est lu en partant de l'état 0 (pour le premier) ou 2 (pour les suivants) ; cette lecture se termine toujours dans l'état 2 et provoque l'écriture du bloc $\mathbf{0}^{p_i-1}\mathbf{1}\mathbf{0}\mathbf{1}^{q_i-1}$. Le dernier bloc $\mathbf{0}^{p_k}\mathbf{1}^{q_k}\$$ fait exception : si $q_k = 0$, alors sa lecture commence dans l'état 0 ou 2, se termine dans l'état 3, et provoque l'écriture de $\mathbf{0}^{p_k}\$$; sinon, le bloc écrit est $\mathbf{0}^{p_k-1}\mathbf{1}\mathbf{0}\mathbf{1}^{q_k-1}\$$. Finalement, le mot écrit sur la bande de sortie est bien celui annoncé : $\mathbf{1}^{q_0}\mathbf{0}^{p_1-1}\mathbf{1}\mathbf{0}\mathbf{1}^{q_1-1}\mathbf{0}^{p_2-1}\mathbf{1}\mathbf{0}\mathbf{1}^{q_2-1}\dots\mathbf{0}^{p_k-1}\mathbf{1}\mathbf{0}\mathbf{1}^{q_k-1}\$$ si $q_k > 0$; et $\mathbf{1}^{q_0}\mathbf{0}^{p_1-1}\mathbf{1}\mathbf{0}\mathbf{1}^{q_1-1}\mathbf{0}^{p_2-1}\mathbf{1}\mathbf{0}\mathbf{1}^{q_2-1}\dots\mathbf{0}^{p_k}\$$ si $q_k = 0$.

Formule de Pick

Question 8 Notons p et q les côtés du rectangle ; il y a $m = (p-1)(q-1)$ points à l'intérieur et $n = 2p + 2q$ sur les côtés. La formule donne $(p-1)(q-1) + p + q - 1 = 2pq$.

Question 9 La formule est immédiate pour un triangle rectangle. Un triangle ABC quelconque peut être inscrit dans un rectangle, voir la figure ci-dessous ; le premier cas illustre la situation où deux des sommets ont même abscisse ; dans le deuxième cas, le triangle peut être inscrit dans un triangle rectangle ; enfin, le troisième cas illustre la situation générale. La vérification de la formule pour chacun des cas est laissée au lecteur !

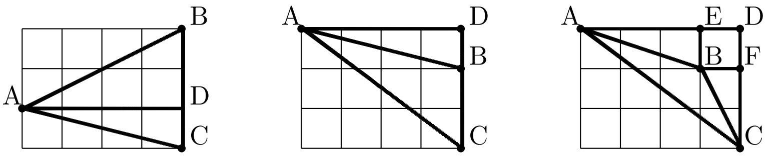


Figure 1: décomposition d'un triangle quelconque

Question 10 Un raisonnement par récurrence suffit : la formule est acquise pour les triangles. Supposons-la acquise pour ls polygones à n côtés, avec $n \geqslant 3$; soit $\mathcal{P}$ un polygone à $n+1$ côtés : en le coupant le long d'une diagonale, on peut le décomposer en deux polygones ayant chacun un nombre de côtés compris entre 3 et $n-1$. Il suffit d'appliquer la formule aux deux polygones et de recoller les résultats.

Mots de Christoffel

Question 11 Le mot attendu est **000100010010001001**. En prime, voici un programme en Caml qui calcule le mot de Christoffel de pente p/q :

```
let rec pgcd = function
 | (a,b) when a<0 -> pgcd(-a,b)
 | (a,b) when b<0 -> pgcd(a,-b)
 | (a,0) -> a
 | (a,b) -> pgcd(b,a mod b)
;;

let mdc(p,q) =
 if p<1 or q<1 or pgcd(p,q) <> 1 then failwith "argument incorrect" else
 let rec aux s = function
  | (x,y) when p*x = q*y -> s
  | (x,y) when q*(y+1) <= p*x -> aux (s ^ "1") (x,y+1)
  | (x,y) -> aux (s ^ "0") (x+1,y)
 in aux "0" (1,0) ;;
```

Question 12 Le chemin de Christoffel demandé apparaît à la figure 2. Vous noterez que ce chemin, amputé de ses premier et dernier pas, est palindrome.

Question 13 Notons A (resp. B) l'extrémité du chemin de Christoffel associé à v (resp. u). Tous les points du chemin de Christoffel associé à u, autres que O et B, sont strictement sous la droite OB. En particulier A est strictement sous cette droite. Ceci revient à dire que $\pi(u) < \pi(v)$.

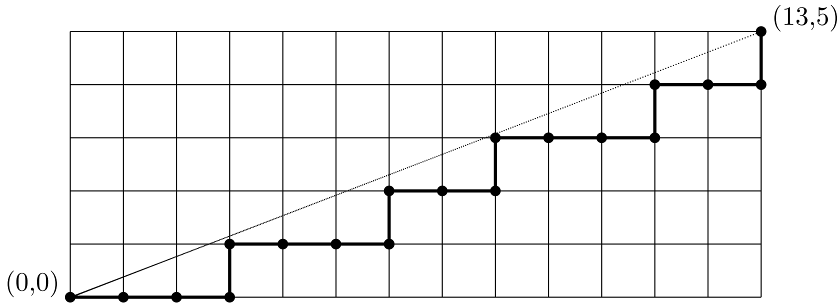


Figure 2: mot de Christoffel de pente 5/13

Question 14 A et B ont la même signification qu'à la question précédente. Notons $w = u[1..i] = v[1..i]$, $x = |w|_{\mathbf{0}}$ et $y = |w|_{\mathbf{1}}$. Le point C(x, y) est sur les chemins de Christoffel relatifs aux mots u et v. Le point D$(x, y+1)$ est sur le chemin relatif à v, mais pas sur celui qui est relatif à u. Donc la pente de la droite OA est strictement inférieure à celle de la droite OD, qui est elle-même strictement inférieure à celle de la droite OB. Nous en déduisons $\pi(u) < \pi(v)$.

Question 15 Soit u un mot de Christoffel de pente p/q, contenant le facteur **11**. Ce facteur doit être précédé d'au moins un **0**. Ainsi, u contient un facteur **011**, qui décrit un chemin menant d'un point A(r, s) à un point B$(r+1, s+2)$. Notons $\mathcal{D}$ la droite de pente p/q passant par O. Au vu de la pente de u, on peut affirmer que ce mot ne se réduit pas au facteur **011**. Du coup, un moins des deux points A et B est strictement au-dessus de $\mathcal{D}$; par suite, le point I$(r+1, s+1)$ est strictement sous $\mathcal{D}$. D'où la contradiction.

Question 16 Notons γ le chemin de Christoffel associé à p/q, et appliquons-lui successivement la symétrie orthogonale autour de la droite d'équation $x = y$, la symétrie de centre O et enfin la translation de vecteur (q, p). La première transformation envoie γ sur un chemin γ', qui passe par les points à coordonnées entières situés juste au-dessus de la droite de pente q/p ; la rotation envoie γ' sur un chemin γ'' qui passe par les points à coordonnées entières situés juste au-dessous de la droite de pente p/q ; et la translation envoie γ'' sur un chemin δ de pente q/p, menant de O au point M$'(q, p)$. Or le mot de Christoffel de ce chemin est $\tilde{u}$.

Question 17 La question ne se pose que si $q \geqslant 2$. S'il n'y avait qu'une longueur de bloc λ, on aurait $u = (\mathbf{0}\mathbf{1}^{\lambda-1})^p$: ce ne serait pas un mot de Christoffel. Observons la figure 3 ; le dessin est réalisé avec $\ell = 2$, mais le raisonnement qui va être tenu est général. Les coordonnées des points A, B, C et D sont $x_A = x_C = x$, $x_B = x_D = x+1$, $y_A = y$, $y_C = y+1$, $y_B = y+\ell$ et $y_D = y+\ell+1$.

La pente de la droite OM est p/q ; or $\ell - 1 = y_B - y_C < y_N - y_M < y_D - y_A = \ell + 1$. S'il existait un bloc $\mathbf{0}\mathbf{1}^{\ell'}$ avec $|\ell - \ell'| > 1$, $y_N - y_M$ devrait appartenir à $]\ell-1, \ell+1[$ et à $]\ell-1, \ell+1[$, ce qui est impossible puisque ces deux intervalles sont disjoints. Donc il n'existe que deux longueurs de blocs possibles.

Nous avons $q\lambda < p < q(\lambda+1)$, donc $\lambda = \left\lfloor \dfrac{p}{q} \right\rfloor$.

Question 18 Notons $p = |u|_{\mathbf{1}}$, $q = |u|_{\mathbf{0}}$, $p' = |v|_{\mathbf{1}}$ et $q' = |t|_{\mathbf{0}}$. Alors $\det(u, v) = |u|_{\mathbf{0}} \times |v|_{\mathbf{1}} - |u|_{\mathbf{1}} \times |v|_{\mathbf{0}} = qp' - pq' = 1$, donc $p'/q' - p/q = 1/qq' > 0$, soit $\pi(v) - \pi(u) > 0$.

Question 19 Observons la figure 3 : l'aire du triangle ABC est égale à $(p+r)(q+s)/2 - pq/2 - rs/2 - ps = (qr - ps)/2 = 1/2$. La formule de Pick nous dit alors qu'il n'y a aucun point du quadrillage à l'intérieur de ce triangle ; par suite, la concaténation des deux chemins de Christoffel associés à u et v est le chemin de Christoffel associé à uv. Fin de la preuve.

Question 20 Supposons $x = \mathbf{0}$. Alors :

$$\det(s,t) = |s|_{\mathbf{0}} \times |t|_{\mathbf{1}} - |s|_{\mathbf{1}} \times |t|_{\mathbf{0}} = \big(1 + |u|_{\mathbf{0}}\big) \times |v|_{\mathbf{1}} - |u|_{\mathbf{1}} \times \big(|v|_{\mathbf{0}} - 1\big) = |u|_{\mathbf{0}} \times |v|_{\mathbf{1}} - |u|_{\mathbf{1}} \times |v|_{\mathbf{0}} + |u|_{\mathbf{1}} + |v|_{\mathbf{1}}$$

Donc $\det(s,t) = \det(u,v) + p$. Un calcul semblable nous donne $\det(s,t) = \det(u,v) - q$ lorsque $x = \mathbf{1}$.

Question 21 Soit $k \in [\![1, p+q-1]\!]$. Notons $s = u[1..k]$ et $t = u[k+1..p+q]$, puis $\alpha = |s|_{\mathbf{0}}$ et $\beta = |s|_{\mathbf{1}}$; alors $|t|_{\mathbf{0}} = q - \alpha$, $|t|_{\mathbf{1}} = p - \beta$ et $\delta(k) = p\alpha - q\beta$. La pente de s est β/α ; mais s est un préfixe propre non vide de u ; donc $\beta/\alpha = \pi(s) < \pi(u) = p/q$, soit $p\alpha - q\beta > 0$; donc $\delta(k) > 0$. Il reste à établir $\delta(k) < p + q$.

Nous supposerons $p < q$; le cas $p > q$ se traite par symétrie. Dans le chemin de Christoffel associé à u, les segments verticaux sont tous de longueur 1. Notons P l'extrémité du chemin associé à u et I l'intersection de OM et de la droite d'équation $x = x_{\text{P}}$. Si P est l'extrémité supérieure d'un segment vertical, ou si P est entre

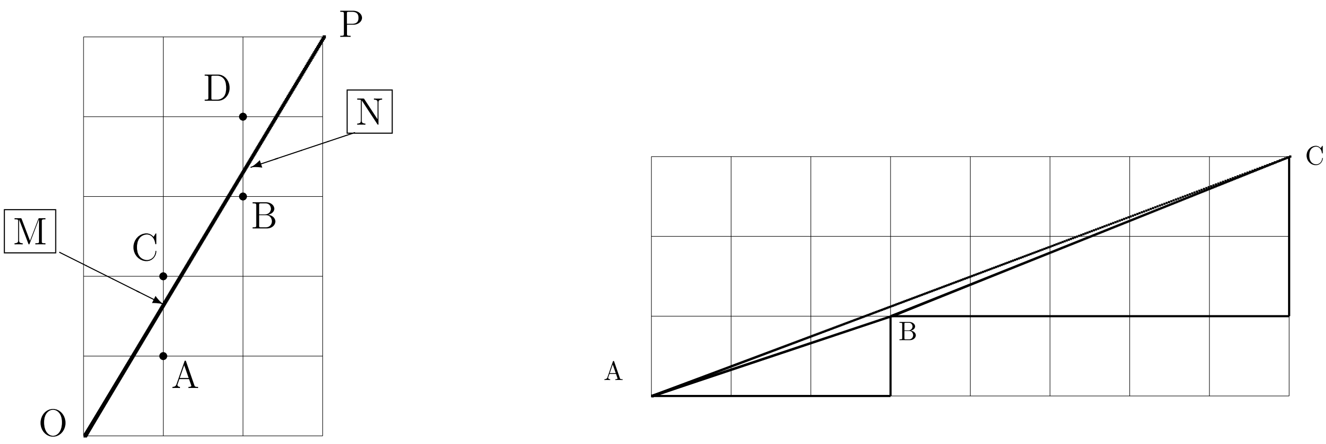


Figure 3: encadrement de p/q (à gauche) et collage de deux mots de Christoffel (à droite)

deux segments horizontaux, alors $y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{P}} < 1$. Sinon, P est l'extrémité inférieure d'un segment vertical ; notons $\mathrm{Q} = (x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}} + 1)$ et $\mathrm{R} = (x_{\mathrm{P}} - 1, y_{\mathrm{P}} + 1)$. La droite OM coupe le segment QR en un point J. Dans le triangle QIJ, rectangle en Q, l'hypothénuse a pour pente p/q ; comme $x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{J}} < 1$, nous en déduisons $y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{Q}} < p/q$ et donc $y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{P}} < 1 + p/q$.

Notons $\lambda = x_{\mathrm{P}}$ pour alléger ; alors $\delta(k) = \det(u, v)$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$. Mais cette aire est aussi la somme des aires des deux triangles OPI et PIM, lesquelles sont respectivement égales à $\lambda(y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{P}})$ et $(q - \lambda)(y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{P}})$. La somme de ces aires est $q(y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{P}}) < p + q$. Fin de la preuve.

Question 22 Comme $\delta(0) = \delta(p+q) = 0$, il suffit de prouver que, si $1 \leqslant i < j < p + q$, alors $\delta(i) \neq \delta(j)$. Le résultat de Q20 nous done $\delta(j) = \delta(i) + p\alpha - q\beta$, où $\alpha = |u|_{\mathbf{0}}$, $\beta = |u|_{\mathbf{1}}$ et $u = f[i+1..j]$. Nous avons $0 < \alpha < q$ et $0 \leqslant \beta < p$. Or p et q sont premiers entre eux : donc $p\alpha \neq q\beta$.

Question 23 Nous avons $\delta(0) = \delta(p+q) = 0$. La restriction de δ à $[\![1, p+q-1]\!]$ est injective d'après Q22 et prend ses valeurs dans $[\![1, p+q-1]\!]$. Cette restriction est donc bijective. Par conséquent, la valeur 1 est prise par δ une fois et une seule, lorsque k décrit $[\![0, p+q]\!]$.

Transducteurs et mots de Christoffel

Question 24 Il suffit, dans le transducteur $\mathcal{R}$, d'inverser les transitions marquées $\mathbf{0}/\varepsilon$ et $\mathbf{0}/\mathbf{0}$.

▶ Les réponses aux deux dernières questions, ainsi que la preuve de la propriété «palindromique» énoncée à la question 12 seront (peut-être) rédigées ultérieurement ...

Références bibliographiques

▶ Documents utilisés : *Image par homographie des mots de Christoffel*, de Jean-Pierre Borel ; et *Opérations sur les mots de Christoffel*, d'Éric Laurier.

▶ Un grand merci à Joël Sornette pour son aide sur quelques points délicats.

FIN