

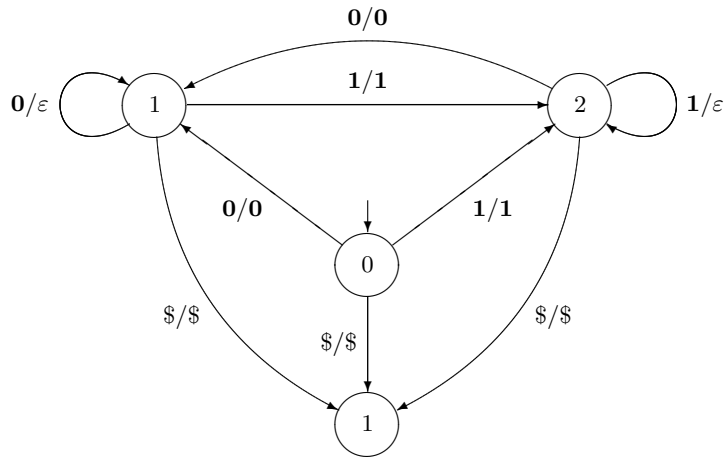
# Option Informatique en Spé MP et MP\*

## Devoir à rendre après les vacances de Noël : le corrigé

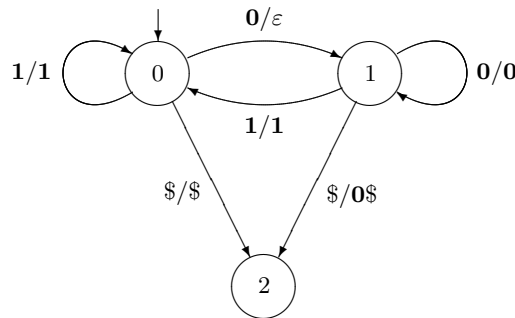
### Transducteurs rationnels

**Question 1** 11101011\$.

**Question 2** Il s'agit de recopier la première lettre de chaque bloc, et d'ignorer les suivantes.



**Question 3** On saute le premier 0 de chaque bloc de 0; le fait d'être alors dans l'état 2 sert à mémoriser le 0 sauté, qu'il conviendra d'écrire sur la sortie si l'on est en train de lire le dernier bloc de 0.



**Question 4** Chaque transition qui efface un caractère mène à l'état 1; or, lorsque l'on sort de cet état, on écrit deux caractères sur la bande de sortie. Tout calcul se termine dans l'état 3; donc on sort de l'état 2 autant de fois qu'on y entre. Conclusion: le mot de sortie a la même longueur que le mot d'entrée. C'est la loi de Kirchhoff pour les nœuds!

**Question 5** La lecture de  $0^p$  provoque l'écriture de  $0^{p-1}$  et mène à l'état 1; ensuite, la lecture de  $1^q$  provoque l'écriture de  $101^{q-1}$ , qui se termine dans l'état 2. Enfin, la lecture du \$ provoque l'écriture d'un \$ et mène à l'état 3. Donc  $\kappa(0^p 1^q \$) = 0^{p-1} 101^{q-1} \$$ .

**Question 6** On passe de  $u$  à  $\kappa(u)$  en remplaçant chaque facteur 01 par le facteur 10.

**Question 7** Le résultat est clair si  $u = 1^q \$$ . Sinon,  $u = 1^{q_0} 0^{p_1} 1^{q_1} 0^{p_2} 1^{q_2} \dots 0^{p_k} 1^{q_k} \$$ , où les exposants sont strictement positifs sauf peut-être  $q_0$  et/ou  $q_k$ . Le bloc initial de 1 (éventuellement vide) est recopié tel quel sur la sortie; le transducteur est toujours dans l'état 0. Ensuite, chaque bloc  $0^{p_i} 1^{q_i}$  est lu en partant de l'état 0

(pour le premier) ou 2 (pour les suivants) ; cette lecture se termine toujours dans l'état 2 et provoque l'écriture du bloc  $\mathbf{0}^{p_i-1}\mathbf{101}^{q_i-1}$ . Le dernier bloc  $\mathbf{0}^{p_k}\mathbf{1}^{q_k}$  fait exception : si  $q_k = 0$ , alors sa lecture commence dans l'état 0 ou 2, se termine dans l'état 3, et provoque l'écriture de  $\mathbf{0}^{p_k}$  ; sinon, le bloc écrit est  $\mathbf{0}^{p_k-1}\mathbf{101}^{q_k-1}$ . Finalement, le mot écrit sur la bande de sortie est bien celui annoncé :  $\mathbf{1}^{q_0}\mathbf{0}^{p_1-1}\mathbf{101}^{q_1-1}\mathbf{0}^{p_2-1}\mathbf{101}^{q_2-1} \dots \mathbf{0}^{p_k-1}\mathbf{101}^{q_k-1}$  si  $q_k > 0$  ; et  $\mathbf{1}^{q_0}\mathbf{0}^{p_1-1}\mathbf{101}^{q_1-1}\mathbf{0}^{p_2-1}\mathbf{101}^{q_2-1} \dots \mathbf{0}^{p_k}$  si  $q_k = 0$ .

## Formule de Pick

**Question 8** Notons  $p$  et  $q$  les côtés du rectangle ; il y a  $m = (p-1)(q-1)$  points à l'intérieur et  $n = 2p + 2q$  sur les côtés. La formule donne  $(p-1)(q-1) + p + q - 1 = 2pq$ .

**Question 9** La formule est immédiate pour un triangle rectangle. Un triangle  $ABC$  quelconque peut être inscrit dans un rectangle, voir la figure ci-dessous ; le premier cas illustre la situation où deux des sommets ont même abscisse ; dans le deuxième cas, le triangle peut être inscrit dans un triangle rectangle ; enfin, le troisième cas illustre la situation générale. La vérification de la formule pour chacun des cas est laissée au lecteur !

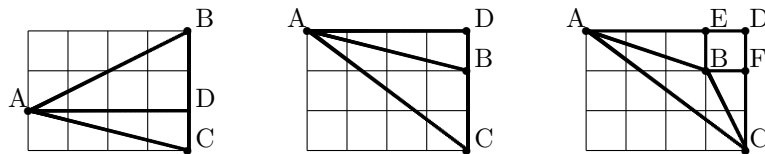


Figure 1: décomposition d'un triangle quelconque

**Question 10** Un raisonnement par récurrence suffit : la formule est acquise pour les triangles. Supposons-la acquise pour les polygones à  $n$  côtés, avec  $n \geq 3$  ; soit  $\mathcal{P}$  un polygone à  $n+1$  côtés : en le coupant le long d'une diagonale, on peut le décomposer en deux polygones ayant chacun un nombre de côtés compris entre 3 et  $n-1$ . Il suffit d'appliquer la formule aux deux polygones et de recoller les résultats.

## Mots de Christoffel

**Question 11** Le mot attendu est **000100010010001001**. En prime, voici un programme en Caml qui calcule le mot de Christoffel de pente  $p/q$  :

```

let rec pgcd = fonction
  | (a,b) when a<0 -> pgcd(-a,b)
  | (a,b) when b<0 -> pgcd(a,-b)
  | (a,0) -> a
  | (a,b) -> pgcd(b,a mod b)
;;

let mdc(p,q) =
  if p<1 or q<1 or pgcd(p,q) <> 1 then failwith "argument incorrect" else
  let rec aux s = fonction
    | (x,y) when p*x = q*y -> s
    | (x,y) when q*(y+1) <= p*x -> aux (s ^ "1") (x,y+1)
    | (x,y) -> aux (s ^ "0") (x+1,y)
  in aux "0" (1,0) ;;

```

**Question 12** Le chemin de Christoffel demandé apparaît à la figure 2. Vous noterez que ce chemin, amputé de ses premier et dernier pas, est palindrome.

**Question 13** Notons A (resp. B) l'extrémité du chemin de Christoffel associé à  $v$  (resp.  $u$ ). Tous les points du chemin de Christoffel associé à  $u$ , autres que O et B, sont strictement sous la droite OB. En particulier A est strictement sous cette droite. Ceci revient à dire que  $\pi(u) < \pi(v)$ .

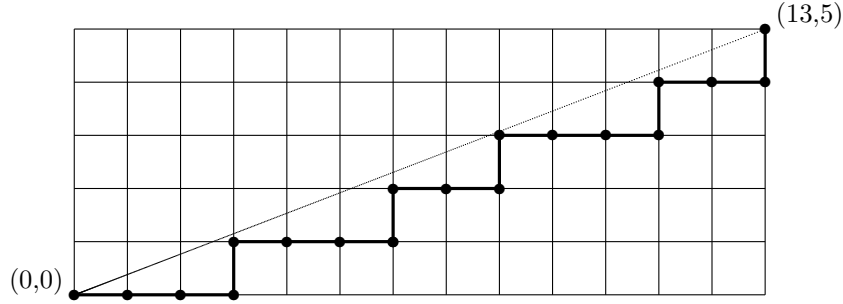


Figure 2: mot de Christoffel de pente 5/13

**Question 14** A et B ont la même signification qu'à la question précédente. Notons  $w = u[1..i] = v[1..i]$ ,  $x = |w|_0$  et  $y = |w|_1$ . Le point  $C(x, y)$  est sur les chemins de Christoffel relatifs aux mots  $u$  et  $v$ . Le point  $D(x, y + 1)$  est sur le chemin relatif à  $v$ , mais pas sur celui qui est relatif à  $u$ . Donc la pente de la droite OA est strictement inférieure à celle de la droite OD, qui est elle-même strictement inférieure à celle de la droite OB. Nous en déduisons  $\pi(u) < \pi(v)$ .

**Question 15** Soit  $u$  un mot de Christoffel de pente  $p/q$ , contenant le facteur **11**. Ce facteur doit être précédé d'au moins un **0**. Ainsi,  $u$  contient un facteur **011**, qui décrit un chemin menant d'un point  $A(r, s)$  à un point  $B(r + 1, s + 2)$ . Notons  $\mathcal{D}$  la droite de pente  $p/q$  passant par O. Au vu de la pente de  $u$ , on peut affirmer que ce mot ne se réduit pas au facteur **011**. Du coup, un moins des deux points A et B est strictement au-dessus de  $\mathcal{D}$ ; par suite, le point  $I(r + 1, s + 1)$  est strictement sous  $\mathcal{D}$ . D'où la contradiction.

**Question 16** Notons  $\gamma$  le chemin de Christoffel associé à  $p/q$ , et appliquons-lui successivement la symétrie orthogonale autour de la droite d'équation  $x = y$ , la symétrie de centre O et enfin la translation de vecteur  $(q, p)$ . La première transformation envoie  $\gamma$  sur un chemin  $\gamma'$ , qui passe par les points à coordonnées entières situés juste au-dessus de la droite de pente  $q/p$ ; la rotation envoie  $\gamma'$  sur un chemin  $\gamma''$  qui passe par les points à coordonnées entières situés juste au-dessous de la droite de pente  $p/q$ ; et la translation envoie  $\gamma''$  sur un chemin  $\delta$  de pente  $q/p$ , menant de O au point  $M'(q, p)$ . Or le mot de Christoffel de ce chemin est  $\tilde{u}$ .

**Question 17** La question ne se pose que si  $q \geq 2$ . S'il n'y avait qu'une longueur de bloc  $\lambda$ , on aurait  $u = (01^{\lambda-1})^p$ : ce ne serait pas un mot de Christoffel. Observons la figure 3; le dessin est réalisé avec  $\ell = 2$ , mais le raisonnement qui va être tenu est général. Les coordonnées des points A, B, C et D sont  $x_A = x_C = x$ ,  $x_B = x_D = x + 1$ ,  $y_A = y$ ,  $y_C = y + 1$ ,  $y_B = y + \ell$  et  $y_D = y + \ell + 1$ .

La pente de la droite OM est  $p/q$ ; or  $\ell - 1 = y_B - y_C < y_N - y_M < y_D - y_A = \ell + 1$ . S'il existait un bloc  $01^{\ell'}$  avec  $|\ell - \ell'| > 1$ ,  $y_N - y_M$  devrait appartenir à  $] \ell - 1, \ell + 1[$  et à  $] \ell' - 1, \ell' + 1[$ , ce qui est impossible puisque ces deux intervalles sont disjoints. Donc il n'existe que deux longueurs de blocs possibles.

Nous avons  $q\lambda < p < q(\lambda + 1)$ , donc  $\lambda = \lfloor \frac{p}{q} \rfloor$ .

**Question 18** Notons  $p = |u|_1$ ,  $q = |u|_0$ ,  $p' = |v|_1$  et  $q' = |v|_0$ . Alors  $\det(u, v) = |u|_0 \times |v|_1 - |u|_1 \times |v|_0 = qp' - pq' = 1$ , donc  $p'/q' - p/q = 1/qq' > 0$ , soit  $\pi(v) - \pi(u) > 0$ .

**Question 19** Observons la figure 3: l'aire du triangle ABC est égale à  $(p + r)(q + s)/2 - pq/2 - rs/2 - ps = (qr - ps)/2 = 1/2$ . La formule de Pick nous dit alors qu'il n'y a aucun point du quadrillage à l'intérieur de ce triangle; par suite, la concaténation des deux chemins de Christoffel associés à  $u$  et  $v$  est le chemin de Christoffel associé à  $uv$ . Fin de la preuve.

**Question 20** Supposons  $x = 0$ . Alors :

$$\det(s, t) = |s|_0 \times |t|_1 - |s|_1 \times |t|_0 = (1 + |u|_0) \times |v|_1 - |u|_1 \times (|v|_0 - 1) = |u|_0 \times |v|_1 - |u|_1 \times |v|_0 + |u|_1 + |v|_1$$

Donc  $\det(s, t) = \det(u, v) + p$ . Un calcul semblable nous donne  $\det(s, t) = \det(u, v) - q$  lorsque  $x = 1$ .

**Question 21** Soit  $k \in \llbracket 1, p + q - 1 \rrbracket$ . Notons  $s = u[1..k]$  et  $t = u[k + 1..p + q]$ , puis  $\alpha = |s|_0$  et  $\beta = |s|_1$ ; alors  $|t|_0 = q - \alpha$ ,  $|t|_1 = p - \beta$  et  $\delta(k) = p\alpha - q\beta$ . La pente de  $s$  est  $\beta/\alpha$ ; mais  $s$  est un préfixe propre non vide de  $u$ ; donc  $\beta/\alpha = \pi(s) < \pi(u) = p/q$ , soit  $p\alpha - q\beta > 0$ ; donc  $\delta(k) > 0$ . Il reste à établir  $\delta(k) < p + q$ .

Nous supposons  $p < q$ ; le cas  $p > q$  se traite par symétrie. Dans le chemin de Christoffel associé à  $u$ , les segments verticaux sont tous de longueur 1. Notons P l'extrémité du chemin associé à  $u$  et I l'intersection de OM et de la droite d'équation  $x = x_P$ . Si P est l'extrémité supérieure d'un segment vertical, ou si P est entre

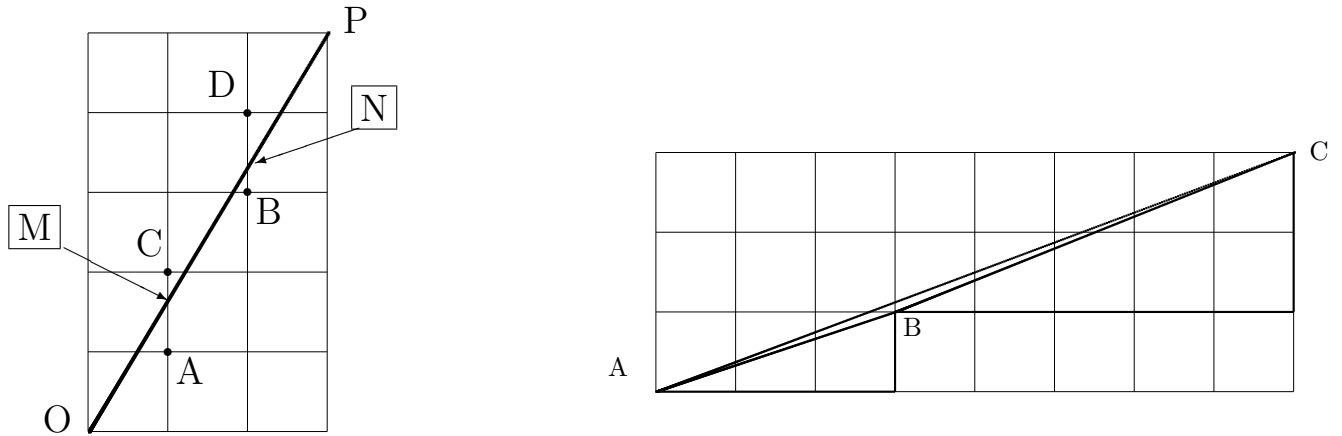


Figure 3: encadrement de  $p/q$  (à gauche) et collage de deux mots de Christoffel (à droite)

deux segments horizontaux, alors  $y_I - y_P < 1$ . Sinon, P est l'extrémité inférieure d'un segment vertical; notons  $Q = (x_P, y_P + 1)$  et  $R = (x_P - 1, y_P + 1)$ . La droite OM coupe le segment QR en un point J. Dans le triangle QIJ, rectangle en Q, l'hypothénuse a pour pente  $p/q$ ; comme  $x_Q - x_J < 1$ , nous en déduisons  $y_I - y_Q < p/q$  et donc  $y_I - y_P < 1 + p/q$ .

Notons  $\lambda = x_P$  pour alléger; alors  $\delta(k) = \det(u, v)$  est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{OP}$  et  $\overrightarrow{PM}$ . Mais cette aire est aussi la somme des aires des deux triangles OPI et PIM, lesquelles sont respectivement égales à  $\lambda(y_I - y_P)$  et  $(q - \lambda)(y_I - y_P)$ . La somme de ces aires est  $q(y_I - y_P) < p + q$ . Fin de la preuve.

**Question 22** Comme  $\delta(0) = \delta(p + q) = 0$ , il suffit de prouver que, si  $1 \leq i < j < p + q$ , alors  $\delta(i) \neq \delta(j)$ . Le résultat de Q20 nous donne  $\delta(j) = \delta(i) + p\alpha - q\beta$ , où  $\alpha = |u|_0$ ,  $\beta = |u|_1$  et  $u = f[i + 1..j]$ . Nous avons  $0 < \alpha < q$  et  $0 \leq \beta < p$ . Or  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux: donc  $p\alpha \neq q\beta$ .

**Question 23** Nous avons  $\delta(0) = \delta(p + q) = 0$ . La restriction de  $\delta$  à  $\llbracket 1, p + q - 1 \rrbracket$  est injective d'après Q22 et prend ses valeurs dans  $\llbracket 1, p + q - 1 \rrbracket$ . Cette restriction est donc bijective. Par conséquent, la valeur 1 est prise par  $\delta$  une fois et une seule, lorsque  $k$  décrit  $\llbracket 0, p + q \rrbracket$ .

## Transducteurs et mots de Christoffel

**Question 24** Il suffit, dans le transducteur  $\mathcal{R}$ , d'inverser les transitions marquées  $\mathbf{0}/\varepsilon$  et  $\mathbf{0}/\mathbf{0}$ .

► Les réponses aux deux dernières questions, ainsi que la preuve de la propriété «palindromique» énoncée à la question 12 seront (peut-être) rédigées ultérieurement ...

### Références bibliographiques

► Documents utilisés: *Image par homographie des mots de Christoffel*, de Jean-Pierre BOREL; et *Opérations sur les mots de Christoffel*, d'Éric LAURIER.

► Un grand merci à Joël SORNETTE pour son aide sur quelques points délicats.

FIN