Option Informatique en Spé MP et MP*

Devoir à rendre après les vacances de Noël

Transducteurs et mots de Christoffel

Résumé

La première partie présente la notion de *transducteur* : c'est un automate fini muni d'une deuxième bande, sur laquelle il peut, à chaque transition, écrire zéro, un ou plusieurs symboles. Il réalise ainsi une fonction qui, à un mot écrit sur la bande d'entrée, associe le mot écrit sur la bande de sortie.

La deuxième partie vous fait démontrer la formule de Pick ; elle servira dans la suite, et peut, au besoin, être admise.

La troisième partie définit les mots (finis) de Christoffel et propose une étude de certaines de leurs propriétés.

Enfin, la quatrième partie réalise le lien entre les transducteurs et les mots de Christoffel.

Veuillez rédiger chaque partie sur une copie séparée.

Table des matières

1 Transducteurs rationnels

► Un *transducteur rationnel* est un automate fini équipé de deux bandes : une *bande d'entrée*, sur laquelle il lit un mot, une lettre à la fois ; et une *bande de sortie*, sur laquelle, à chaque transition, il peut écrire zéro, une ou plusieurs lettres. La représentation graphique d'un transducteur est très semblable à celle d'un automate fini ; la différence principale est que chaque transition est étiquetée par un couple (x, v) où x est la lettre lue sur la bande d'entrée, et v le mot écrit sur la bande de sortie. La figure 1 donne un exemple de transducteur ; vous remarquerez qu'il ne possède pas d'état final. L'alphabet utilisé (en entrée comme en sortie) est $\Sigma = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \$\}$.

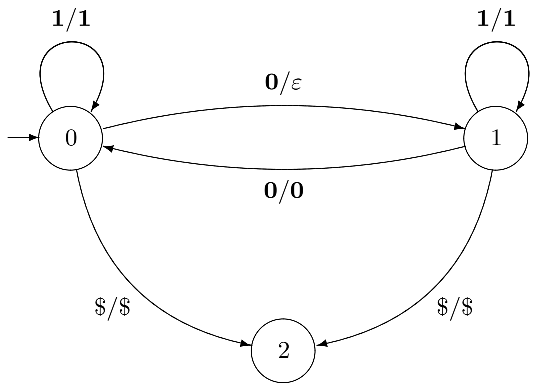

Figure 1: le transducteur $\mathcal{R}$

Le transducteur $\mathcal{R}$ est *déterministe complet* : pour un couple (q, x) formé d'un état q et d'une lettre x, il existe exactement une transition partant de q et lisant la lettre x. Dans tous le problème, nous utiliserons des transducteurs déterministes.

► Un *calcul* de longueur n de ce transducteur est une suite $(q_i, x_i/v_i, q'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de transitions, vérifiant $q'_i = q_{i+1}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. L'*étiquette d'entrée* est le mot $u = x_1 \dots x_n$ (dont la longueur est n) ; l'*étiquette de sortie* est le mot $v_1 \dots v_n$.

► Le transducteur $\mathcal{R}$ étant placé dans son état initial, on lui présente un mot formé d'une suite (éventuellement vide) de **0** et de **1**, suivie d'un caractère \$; celui-ci sert de marqueur, et compense en quelque sorte l'absence d'état final. Sur notre exemple, ceci implique que le calcul se termine dans l'état 2. Si nous présentons le mot **00101100**\$ sur la bande d'entrée, le transducteur écrira successivement ε, **0**, **1**, ε, **1**, **1**, **0**, ε et \$ sur la bande de sortie ; finalement, le mot écrit sur cette bande est **01110**\$. Nous dirons que le mot v écrit sur la bande de sortie est l'*image* du mot u présenté sur la bande d'entrée.

Question 1 Donnez (sans justification) l'image du mot **0111010011**\$.

► Un peu de réflexion montre que la fonction réalisée par le transducteur $\mathcal{R}$ se réduit à l'effacement des **0** dont l'indice (parmi les **0**) est impair. On ne vous demande pas de le prouver !

► Notons τ la fonction qui, à un mot u décrit par l'expression rationnelle $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\$$, associe le mot v déduit de u par remplacement de chaque ≪paquet≫ de **0** (resp. **1**) consécutifs par un seul **0** (resp. un seul **1**). Par exemple, $\tau(\mathbf{00011011111000}\$) = \mathbf{01010}\$$.

Question 2 Construisez un transducteur $\mathcal{T}$ à quatre états réalisant la fonction τ. Aucune justification n'est demandée.

► Notons π la fonction qui, à un mot u décrit par l'expression rationnelle $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\$$, associe le mot v déduit de u par effacement de chaque **0** immédiatement suivi d'un **1**. Par exemple, $\pi(\mathbf{000110100}\$) = \mathbf{0011100}\$$. Notez bien que $\pi(\mathbf{0011}\$) = \mathbf{011}\$$.

Question 3 Construisez un transducteur $\mathcal{P}$ à trois états réalisant la fonction π. Aucune justification n'est demandée.

► Notons $\mathcal{K}$ le transducteur décrit par la figure 2, et κ la fonction réalisée par $\mathcal{K}$.

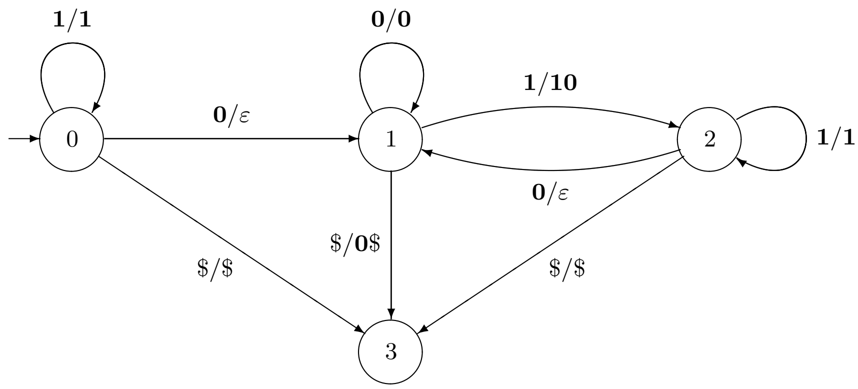

Figure 2: le transducteur $\mathcal{K}$

Question 4 Montrez qu'un mot et son image ont même longueur.

Question 5 Soient $p > 0$ et $q > 0$. Explicitez $\kappa(\mathbf{0}^p\mathbf{1}^q\$)$.

Question 6 Soit u décrit par l'expression rationnelle $(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\$$. Décrivez de façon informelle $\kappa(u)$.

Question 7 $\star\star$ Donnez une preuve complète de votre réponse à la question précédente !

2 La formule de Pick

▶ Cette partie est indépendante des autres ; son objectif est d'établir une formule qui ne sera utilisée que dans la question 19.

▶ Par *polygone*, nous entendons une suite $A_1A_2\dots A_n$ de points distincts du plan, avec $n \geqslant 3$, vérifiant la propriété suivante : deux côtés de ce polygone n'ont pas de point commun autre que l'une de leurs extrémités. Nous excluons donc les polygones «croisés».

▶ La formule de Pick permet de calculer l'aire d'un polygone dont tous les sommets ont des coordonnées entières : cette aire est égale à $m + n/2 - 1$, où m (resp. n) est le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur (resp. sur l'une des arêtes) du polygone. La figure suivante illustre cette formule.

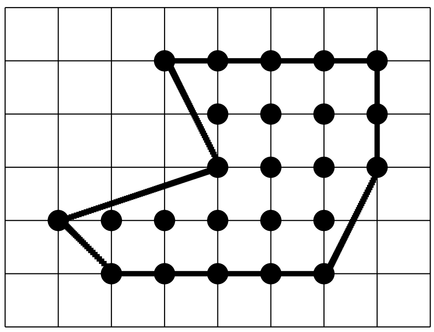

Figure 3: illustration de la formule de Pick

Nous avons $m = 14$ et $n = 10$, donc l'aire totale est égale à 16 carrés de côté 1 ; on peut le vérifier sans peine.

Question 8 Démontrez la formule de Pick dans le cas particulier où le polygone est un rectangle à côtés parallèles aux axes.

Question 9 Démontrez la formule de Pick dans le cas particulier où le polygone est un triangle ; vous distinguerez plusieurs cas de figure.

Question 10 $\star$ Démontrez la formule de Pick dans le cas général. Vous pourrez admettre la propriété suivante : dans tout polygone à plus de trois sommets, on peut trouver au moins une diagonale, c'est-à-dire un segment joignant deux sommets, et entièrement contenu dans le polygone.

3 Mots de Christoffel

▶ Soit α un rationnel strictement positif : $\alpha = \dfrac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux. Soit $\mathcal{P}$ un plan ponctuel euclidien, muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Observons la demi-droite de $\mathcal{P}$ d'origine O, dirigée par le vecteur (q, p) : le premier point à coordonnées entières par lequel elle passe est M, de coordonnées (q, p). Au segment [OM] nous associons le chemin passant par des points à coordonnées entières et situés juste en-dessous du segment [OM]. La figure 4 illustre ceci, avec $p = 3$ et $q = 5$; notez bien que O et M sont les seuls points du segment [OM] situés sur le chemin.

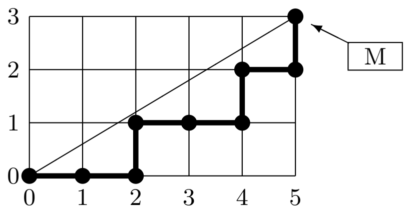

Figure 4: le segment [OM] et le chemin associé (en gras)

Ce chemin peut être codé par un mot u de longueur $p+q$: chaque pas horizontal est codé $\mathbf{0}$, chaque pas vertical est codé $\mathbf{1}$. Nous dirons que u est le mot (fini) de Christoffel associé au rationnel p/q. Remarquons que ce mot commence par un $\mathbf{0}$, se termine par un $\mathbf{1}$, et vérifie $|u|_{\mathbf{0}} = q$ et $|u|_{\mathbf{1}} = p$. Le rationel $\dfrac{p}{q} = \dfrac{|u|_{\mathbf{1}}}{|u|_{\mathbf{0}}}$ est la *pente* de u, nous la noterons $\pi(u)$. Dans le cas de la figure 4, $u = \mathbf{00100101}$.

Question 11 Quel est le mot de Christoffel associé au rationnel 5/13 ?

Question 12 Dessinez le chemin de Christoffel associé au rationnel 5/13.

▶ Quelques remarques banales : le mot de Christoffel de pente 1 est $\mathbf{01}$; un mot de Christoffel de pente $p/q < 1$ doit contenir le facteur $\mathbf{00}$; et de même, un mot de Christoffel de pente $p/q > 1$ doit contenir le facteur $\mathbf{11}$.

Question 13 Soient u et v deux mots de Christoffel. Supposons que u est préfixe propre de v, c'est-à-dire : il existe un mot s non vide tel que $v = us$. Prouvez l'inégalité $\pi(u) < \pi(v)$.

Question 14 Soient u et v deux mots de Christoffel disticts, dont aucun n'est facteur propre de l'autre. Il existe donc un indice i tel que $u[1..i] = v[1..i]$ et $u_{i+1} \neq v_{i+1}$. Pour fixer les idées, supposons $u_{i+1} = \mathbf{0}$ et $v_{i+1} = \mathbf{1}$. Prouvez l'inégalité $\pi(u) < \pi(v)$.

▶ Nous venons d'établir le résultat suivant : si u et v sont deux mots de Christoffel distincts, alors celui qui a la plus petite pente est le premier dans l'ordre lexicographique. Un peu de réflexion montre qu'en fait, on a l'équivalence.

Question 15 Soit u un mot de Christoffel de pente $p/q < 1$. Montrez que $\mathbf{11}$ ne peut être facteur de u.

▶ On montrerait de même que $\mathbf{00}$ ne peut être facteur d'un mot de Christoffel de pente $p/q > 1$.

Question 16 Notons φ le morphisme défini par $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ et $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$. Soit u le mot de Christoffel associé à p/q. Montrez que le mot de Christoffel associé à q/p est $\varphi(\tilde{u})$, où $\tilde{u}$ désigne le miroir du mot u.

▶ Soit u un mot de CHRISTOFFEL de longueur au moins 3, dans lequel apparaît le facteur **11**. Notons $q = |u|_{\mathbf{0}}$. Alors $u = \mathbf{01}^{\ell_1}\mathbf{01}^{\ell_2}\dots\mathbf{01}^{\ell_q}$, où les ℓ_i sont strictement positifs. Nous obtenons ainsi une décomposition de u en q blocs consécutifs, de la forme $\mathbf{01}^{\ell_i}$.

Question 17 $\star\star$ Montrez que les longueurs de ces blocs prennent deux valeurs différentes consécutives λ et $\lambda+1$. Vous donnerez une formule exprimant λ en fonction de p et q.

▶ Soient u et v deux mots de CHRISTOFFEL ; le déterminant de u et v, noté $\det(u,v)$, est $|u|_0 \times |v|_1 - |u|_1 \times |v|_0$. Par exemple, $\det(\mathbf{001}, \mathbf{00101}) = 2 \times 2 - 1 \times 3 = 1$.

Question 18 Soient u et v deux mots de CHRISTOFFEL. Montrez que, si $\det(u,v) = 1$, alors $\pi(u) < \pi(v)$.

Question 19 Soient u et v deux mots de CHRISTOFFEL. Montrez que, si $\det(u,v) = 1$, alors uv est lui aussi un mot de CHRISTOFFEL. Indication : utilisez la formule de PICK.

▶ Nous nous proposons d'établir la réciproque du résultat précédent : si f est un mot de CHRISTOFFEL de longueur au moins 2, alors il existe un et un seul couple (u,v) de mots de CHRISTOFFEL vérifiant $\det(u,v) = 1$ et $f = uv$. Notons p/q la pente de f ; pour $k \in [\![0, p+q]\!]$, notons $f[1..k]$ le préfixe de f de longueur k, $f[k+1..p+q]$ le suffixe de f de longueur $p+q-k$, et $\delta(k) = \det\big(f[1..k], f[k+1..p+q]\big)$. Remarquons que $\delta(0) = \delta(p+q) = 0$.

Question 20 Soient s et t deux mots (non vides) tels que st soit un mot de CHRISTOFFEL de pente p/q. Notons x la dernière lettre de s, u le préfixe de s de longueur $|s|-1$ et $v = xt$; ainsi $st = uv$. Exprimez $\det(s,t)$ en fonction de $\det(u,v)$, p et q ; vous distinguerez deux cas de figure selon que x est égal à **0** ou à **1**.

Question 21 Prouvez que l'intervalle discret $[\![1, p+q-1]\!]$ est stable par δ.

Question 22 Prouvez que $\delta(i) = \delta(j)$ implique $i = j$ ou $\{i,j\} = \{0,p+q\}$.

Question 23 Et maintenant, concluez !

4 Transducteurs et mots de Christoffel

▶ Dans cette partie, nous montrons une utilisation des transducteurs pour réaliser des calculs sur les mots de CHRISTOFFEL.

Question 24 En vous inspirant du transducteur $\mathcal{R}$, construisez un transducteur $\mathcal{S}$ réalisant l'effacement des **0** situés en position paire.

Question 25 $\star\star\star$ Soit u un mot de CHRISTOFFEL de pente p/q, avec q pair. Montrez que l'image de u par le transducteur $\mathcal{S}$ est le mot de CHRISTOFFEL de pente p/q', où $q' = q/2$.

Question 26 $\star\star\star$ Soit u un mot de CHRISTOFFEL de pente p/q, avec q impair. Montrez que le mot de CHRISTOFFEL de pente $2p/q$ est l'image de uu par le transducteur $\mathcal{S}$.

FIN