Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir à rendre après les vacances de la Toussaint 2007

▶ Les exercices sont indépendants.

1 Autour d'un langage

▶ Dans cet exercice, Σ désigne l'alphabet $\{a,b\}$.

▶ Notons L le langage formé des mots sur Σ, dans lesquels chaque occurrence de a est immédiatement suivie d'au moins une occurrence de b.

Question 1 Montrez que L est rationnel, en exhibant une expression rationnelle de ce langage.

Question 2 Montrez que L est rationnel, en exhibant un automate fini qui reconnaît ce langage.

Question 3 Exhibez une bijection de Σ^* sur L.

▶ Notons M le langage formé des mots u sur Σ, qui vérifient $|u|_a \geqslant |u|_b + 2$.

Question 4 Le langage M est-il rationnel ?

2 Sur le nombre d'états finals d'un automate fini

▶ Deux automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont *équivalents* s'ils reconnaissent le même langage.

Question 1 Soit $\mathcal{A}$ un automate fini non déterministe. Montrez que $\mathcal{A}$ est équivalent à un automate fini non déterministe $\mathcal{B}$ possédant un seul état final.

Question 2 Exhibez un langage rationnel L qui ne peut être reconnu par aucun automate fini déterministe possédant un seul état final.

3 Autour du lemme de l'étoile

▶ Dans cet exercice, Σ désigne l'alphabet $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$.

▶ Soient L un langage quelconque et u un mot de L. Nous dirons que u possède une *factorisation itérante* vis-à-vis de L s'il existe des mots x, y et z tels que $y \neq \varepsilon$ et $xy^*z \subset L$.

▶ Avec cette définition, le lemme de l'étoile. s'énonce très simplement : si L est un langage rationnel, alors il existe un entier N tel que tout mot de L de longueur au moins N possède une factorisation itérante.

Question 1 Le lemme de l'étoile peut-il servir à prouver qu'un langage est rationnel ?

Question 2 Soit L un langage rationnel infini ; montrez que L est la réunion disjointe de deux langages rationnels infinis.

Question 3 Soient L et M deux langages ; notons $L \sqsubset M$ lorsque $M - L$ est infini. Supposons L et M rationnels, et $L \sqsubset M$; montrez qu'il existe un langage rationnel P tel que $L \sqsubset P$ et $P \sqsubset M$.

Question 4 Notons A l'ensemble des mots de la forme $\mathbf{0}^{k_1}\mathbf{1}\mathbf{0}^{k_2}\mathbf{1}\ldots\mathbf{0}^{k_{n-1}}\mathbf{1}\mathbf{0}^{k_n}$, où les k_i sont des entiers deux à deux distincts et $n \geqslant 1$. Le langage A est-il rationnel ?

▶ Soit L un langage rationnel ; il est naturel de lui associer le *plus petit* entier N défini par le lemme de l'étoile. Par exemple, si L est décrit par l'expression rationnelle $\mathbf{01}^*$, alors $N = 2$: en effet, le mot $\mathbf{0}$ appartient à L mais ne possède pas de factorisation itérante ; en revanche, le mot $\mathbf{01}$ appartient à L et possède une factorisation itérante : prendre $x = \mathbf{0}$, $y = \mathbf{1}$ et $z = \varepsilon$.

Question 5 Déterminez l'entier N associé au langage rationnel défini par chacune des expressions rationnelles suivantes : $e_1 = \mathbf{0}^*\mathbf{1}^*$; $e_2 = \mathbf{1011}$; $e_3 = \mathbf{10}(\mathbf{11}^*\mathbf{0})^*\mathbf{0}$.

FIN