Option Informatique en Spé MP et MP*
Mots directeurs d'un automate fini : le corrigé

Mots directeurs d'un a.f.d.c.

Question 1 L'automate étant complet, $\mathsf{m}(Q)$ contient au moins un état : donc il n'existe pas de mot de rang nul.

Question 2 Nous avons $\mathsf{m}(q) = q \cdot m = q \cdot (m_1 m_2) = (q \cdot m_1) \cdot m_2 = \mathsf{m}_2(q \cdot m_1) = \mathsf{m}_2\big(\mathsf{m}_1(q)\big) = (\mathsf{m}_2 \circ \mathsf{m}_1)(q)$ et ce pour tout $q \in Q$. Donc $\mathsf{m} = \mathsf{m}_2 \circ \mathsf{m}_1$. L'ordre d'écriture est inversé, parce que les mots sont lus de gauche à droite, alors que la composition des fonctions se lit de droite à gauche.

Question 3 Nous avons $\mathsf{u}(Q) \subset Q$, donc $(\mathsf{m} \circ \mathsf{u})(Q) = \mathsf{m}\big(\mathsf{u}(Q)\big) \subset \mathsf{m}(Q)$; alors $(\mathsf{v} \circ \mathsf{m} \circ \mathsf{u})(Q) = \mathsf{v}\big((\mathsf{m} \circ \mathsf{u})(Q)\big) \subset \mathsf{v}\big(\mathsf{m}(Q)\big)$. Nous en déduisons $\rho(umv) = \big|(\mathsf{v} \circ \mathsf{m} \circ \mathsf{u})(Q)\big| \leqslant \big|\mathsf{v}\big(\mathsf{m}(Q)\big)\big|$. Mais $\big|\mathsf{v}\big(\mathsf{m}(Q)\big)\big| \leqslant \big|\mathsf{m}(Q)\big| = \rho(m)$ d'où $\rho(umv) \leqslant \rho(m)$.

Question 4 La fonction $q \mapsto q \cdot a$ est bijective, il en est donc de même de la fonction $q \mapsto q \cdot a^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$: ainsi, aucun mot de la forme a^k n'est directeur. Considérons maintenant un mot u contenant au moins une occurrence de b : il s'écrit vbw ; alors $q \cdot vb = 1$, puis $q \cdot u = q \cdot vbw = (q \cdot vb) \cdot w = 1 \cdot w$, qui ne dépend pas de w. Donc $\mathbf{D}(\mathcal{A}_2) = X^* b X^*$.

Question 5 Soit ux un mot directeur de $\mathcal{A}$, où x est une lettre injective. Quels que soient q et q', nous avons $q \cdot ux = q' \cdot ux$, donc $(q \cdot u) \cdot x = (q' \cdot u) \cdot x$; comme la lettre x est injective, ceci implique $q \cdot u = q' \cdot u$ et donc u est un mot directeur plus court que ux.

Soit maintenant xu un mot directeur de $\mathcal{A}$, où x est une lettre injective. Nous remarquons que la fonction $\varphi : q \mapsto q \cdot x$ est surjective, puisque c'est une injection de Q (fini) dans lui-même. Soient q et q' deux états ; notons r et r' leurs antécédents par φ ; alors $q \cdot u = (r \cdot x) \cdot u = r \cdot xu = r' \cdot xu = (r' \cdot x) \cdot u = q' \cdot u$. Ceci montre que u est un mot directeur plus court que xu.

Résumons : à tout mot directeur dont la première ou la dernière lettre est injective, nous avons associé un mot directeur plus court. Donc un mot directeur de longueur minimale ne commence ni ne finit par une lettre injective.

Question 6 Remarquons que a est injectif, donc a^k l'est aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrons qu'aucun mot u contenant au moins une occurrence de b n'est injectif : un tel mot s'écrit $a^k bv$. La fonction $q \in Q \mapsto q \cdot a$ est injective ; comme Q est fini, elle est bijective. Il existe donc des états q et q', distincts, tels que $q \cdot a^k = 1$ et $q' \cdot a^k = 3$. Nous avons $1 \cdot b = 3 \cdot b$; donc $q \cdot a^k b = q' \cdot a^k b$, puis $q \cdot u = q' \cdot u$; ceci montre que le mot u n'est pas injectif.

Question 7 Raisonnons par condition nécessaire et suffisante. Supposons que $\mathcal{A}_3$ admet au moins un mot directeur ; notons u un tel mot, de longueur minimale. Il résulte des deux questions précédentes que u commence et finit par b. Remarquons que b est de rang 2, et que $q \cdot bb$ est égal à $q \cdot b$ quel que soit $q \in Q$. Donc un mot directeur de $\mathcal{A}_3$ et de longueur minimale doit commencer par ba et finir par ab, ce qui exclut les mots de la forme b^k. Le mot bab ne convient pas, car $1 \cdot bab = 2$ et $2 \cdot bab = 1$. En revanche, le mot $baab$ convient ; il est minimal, et c'est le seul d'après les remarques que nous avons faites.

Langage des mots directeurs d'un a.f.d.c. dirigé

Question 8 Cet ensemble est le langage reconnu par l'automate fini $(Q, \delta, s, \{t\})$, il est donc rationnel.

Question 9 Fixons $t \in Q$; l'ensemble $L_{\to t}$ des mots w tels que $q \cdot w = t$ pour tout $q \in Q$ est l'intersection des $|Q|$ langages rationnels $L_{q \to t}$. Or l'intersection d'une famille *finie* de rationnels est rationnelle. Nous remarquons ensuite que $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ est la réunion des $|Q|$ langages $L_{\to t}$, où $t \in Q$: et la réunion d'une famille *finie* de rationnels est rationnelle. Ceci termine la preuve.

Question 10 L'inclusion $L \subset \Sigma^* L \Sigma^*$ est banale. Montrons l'inclusion inverse : soient $w \in L$ et $x, y \in \Sigma^*$. Nous aurons $q \cdot xw = (q \cdot x) \cdot w = (q' \cdot x) \cdot w = q' \cdot xw$ quels que soient q et q' : donc xw est directeur. De même $q \cdot wy = (q \cdot w) \cdot y = (q' \cdot w) \cdot y = q' \cdot wy$ quels que soient q et q' : donc wy est directeur. Ceci montre que xwy appartient à L et termine la preuve.

Question 11 Soient $q \in F$ et $x \in \Sigma$. Comme q est accessible, il existe un mot u tel que $\delta(i, u) = q$. Ce mot est reconnu par $\mathcal{A}$, donc il appartient à L ; mais $L = \Sigma^* L \Sigma^*$, donc ux appartient aussi à L. Alors $\delta(q, x) = \delta(i, ux)$ est final.

Question 12 Remarquons que les états non finals de $\mathcal{A}$ apparaissent tous dans $\mathcal{A}'$, ainsi que les transitions qui les relient ; donc tout calcul de $\mathcal{A}$ ne passant par aucun état final a sa contrepartie dans $\mathcal{A}'$: ceci prouve que les états de $\mathcal{A}'$ autres que ω sont accessibles. Soit m un mot de L, de longueur minimale ; le calcul de $\mathcal{A}$ qui reconnaît ce mot commence en i (non final) et se termine dans un état f final ; de par l'hypothèse de minimalité, aucun état intermédiaire n'est final. Notons $q \xrightarrow{x} f$ la dernière transition de ce calcul ; en la remplaçant par $q \xrightarrow{x} \omega$, nous obtenons un calcul de $\mathcal{A}'$ qui mène de i à ω, donc ω est accessible.

Question 13 ω est un puits : $\delta'(\omega, x) = \omega$ pour toute lettre x ; donc $\delta'(\omega, u) = \omega$ pour tout mot u.

Soit u reconnu par $\mathcal{A}$; nous avons $\delta(i, u) \in F$. Notons s le plus court préfixe de u tel que $\delta(i, s) \in F$, et t le mot tel que $u = st$. Le raisonnement tenu à question précédente nous donne $\delta'(i, s) = \omega$; donc $\delta'(i, u) = \delta'(i, st) = \delta'\big(\delta'(i, s), t\big) = \delta'(\omega, t) = \omega$: $\mathcal{A}'$ reconnaît u.

Soit maintenant u reconnu par $\mathcal{A}'$: $\delta'(i, u) = \omega$. Notons v le plus court préfixe de u tel que $\delta(i, v) = \omega$ et $p = |v|$; les $p-1$ premières transitions du calcul $i \xrightarrow{v} \omega$ sont des transitions de $\mathcal{A}$; la dernière étant $q \xrightarrow{v_p} \omega$, il existe dans $\mathcal{A}$ une transition $q \xrightarrow{v_p} q_p$ avec $q_p \in F$. Notons $r = |u| - |v|$; si $r > 0$, le calcul de $\mathcal{A}'$ se poursuit par r transitions $\omega \xrightarrow{v_k} \omega$; il existe donc une transition de $\mathcal{A}$ partant de q_p et étiquetée v_{p+1} ; cette transition mène à un état q_{p+1}, qui appartient à F d'après le résultat de la question 13. Par récurrence, pour chaque transition $\omega \xrightarrow{v_{p+k}} \omega$ du calcul de $\mathcal{A}'$, il existe une transition $q_{p+k-1} \xrightarrow{v_{p+k}} q_{p+k}$ de $\mathcal{A}$, avec $q_{p+k} \in F$. Finalement, nous avons un calcul de $\mathcal{A}$ d'étiquette u, commençant en i et se terminant en $q_{p+r} \in F$: donc $\mathcal{A}$ reconnaît u.

Question 14 Fixons $u \in L$. Soit $q \in Q'$; d'après la question 12, il existe un mot s tel que $\delta'(i, s) = q$. Comme $L = \Sigma^* L \Sigma^*$, le mot su appartient à L, donc $\delta'(i, su) = \omega$. Alors $\delta'(q, u) = \delta'\big(\delta'(i, s), u\big) = \delta'(i, su) = \omega$; ceci vaut quel que soit $q \in Q'$, donc v est directeur de $\mathcal{A}'$.

Question 15 Soit v un mot directeur de $\mathcal{A}'$; alors $\delta'(i, v) = \delta'(\omega, v) = \omega$, donc v est reconnu par $\mathcal{A}'$, donc par $\mathcal{A}$ et finalement v appartient à L.

Question 16 Oui : soient L_1 et L_2 deux langages de cette classe ; ils sont donc tous deux non vides et rationels, et vérifient $L_1 = \Sigma^* L_1 \Sigma^*$ et $L_2 = \Sigma^* L_2 \Sigma^*$. Alors $L_1 \cup L_2$ n'est pas vide, est rationnel, et vérifie $L_1 \cup L_2 = (\Sigma^* L_1 \Sigma^*) \cup (\Sigma^* L_2 \Sigma^*) = \Sigma^*(L_1 \cup L_2)\Sigma^*$. Ceci prouve que $L_1 \cup L_2$ est dans la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{D}}$.

Langage des mots directeurs d'un a.f.n.d.c.

Question 17 Seule l'inclusion $\subset$ requiert une preuve. Soient $u \in \mathbf{D_2}(\mathcal{A})$ et $v \in \Sigma^*$. Soient q et q' deux états de $\mathcal{A}$; nous avons $q \cdot u = q' \cdot u$, donc $q \cdot (uv) = (q \cdot u) \cdot v = (q' \cdot u) \cdot v = q' \cdot (uv)$ ce qui prouve que uv appartient à $\mathbf{D_2}(\mathcal{A})$.

Question 18 Clairement, a est $\mathbf{D_2}$-directeur de $\mathcal{B}_2$, alors que ba ne l'est pas : $1 \cdot (ba) = \{1\}$, tandis que $2 \cdot (ba) = \emptyset$. Le résultat de la question 10 montre que $\mathbf{D_2}(\mathcal{A})$ n'est pas dans la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{D}}$.

Question 19 Seule l'inclusion $\subset$ demande une preuve, laquelle est immédiate : soient u un mot quelconque et $v \in \mathbf{D_1}(\mathcal{A})$; notons t l'état dans lequel se trouve $\mathcal{A}$ après lecture de v. Comme $\mathcal{A}$ est complet, $q \cdot u$ est une partie S non vide de Q ; mais comme v est $\mathbf{D_1}$-directeur, $s \cdot v = t$ quel que soit $s \in S$. Donc $q \cdot (uv) = t$ pour tout $q \in Q$, autrement dit uv est $\mathbf{D_1}$-directeur.

Question 20 Ici encore, seule l'inclusion $\subset$ demande une preuve. Soient u et w deux mots quelconques et $v \in \mathbf{D_3}(\mathcal{A})$. Notons t un état appartenant à $\displaystyle\bigcap_{q \in Q} q \cdot v$. Alors t appartient à $q \cdot (uv) = (q \cdot u) \cdot v$; comme $\mathcal{A}$ n'est pas vide, $t' = t \cdot w$ n'est pas vide ; donc $q \cdot (uvw)$ contient t', et ce quel que soit $q \in Q$. Ceci montre que uvw est $\mathbf{D_3}$-directeur de $\mathcal{A}$.

▶ Nous noterons $\overline{X}$ le complémentaire de X dans Σ^*.

Question 21 Soit L de classe $\mathcal{L}_{\mathrm{ND}_1}$: il existe un a.f.n.d. $\mathcal{A} = (Q, \delta)$ dont L est le langage des mots $\mathbf{D_1}$-directeurs. Soit $t \in Q$ l'état de $\mathcal{A}$ tel que $\delta(q, w) = \{t\}$ pour tout $w \in \mathbf{D_1}(\mathcal{A})$. Remarquons que w appartient à $L_{q \to t}$ pour tout $q \in Q$, et à aucun $L_{q \to q'}$ pour $q' \neq t$. Notons $n = |Q|$, L_i l'intersection des n langages $L_{q \to t}$ et L_o l'intersection des $n(n-1)$ langages $\overline{L_{q \to q'}}$, où $q' \neq t$. Alors $w \in L_i \cap L_o$. Les langages L_i et L_o sont rationnels.

Réciproquement, soit w un mot appartenant à $L_i \cap L_o$; w appartient à $L_{q \to t}$ pour tout $q \in Q$, et à aucun des langages $L_{q \to q'}$ pour $q' \neq t$; donc $\delta(q, w) = \{t\}$ pour tout $q \in Q$, et par suite w est $\mathbf{D_1}$-directeur de $\mathcal{A}$.

Concluons : L est rationnel, en tant qu'intersection des rationnels L_i et L_o.

Question 22 Soit L de classe $\mathcal{L}_{\mathrm{CND}_2}$: il existe un a.f.n.d.c. $\mathcal{A} = (Q, \delta)$ dont L est le langage des mots $\mathbf{D_2}$-directeurs. Soient q, q' et t trois états de $\mathcal{A}$; notons $\Delta_{q,q',t}$ l'ensemble des mots u tels que $t \in q \cdot u \iff t \in q' \cdot u$. Ce langage est rationnel, car $\Delta_{q,q',t} = \Big(L_{q \to t} \cap L_{q' \to t}\Big) \cup \Big(\overline{L_{q \to t}} \cap \overline{L_{q' \to t}}\Big)$. Soit $w \in L$; alors $t \in q \cdot w \iff t \in q' \cdot w$, donc $w \in \Delta_{q,q',t}$, et ce quels que soient les états q, q' et t. Donc w appartient à $\widehat{L} = \bigcup\limits_{q,q',t\in Q} \Delta_{q,q',t}$, qui est rationnel. Réciproquement, soit $w \in \widehat{L}$; alors w appartient à tous les $\Delta_{q,q',t}$; donc $t \in q \cdot w \iff t \in q' \cdot w$ et ce quels que soient q et q' appartenant à Q ; donc w est $\mathbf{D_2}$-directeur de $\mathcal{A}$, soit encore : $w \in L$. Nous avons montré que $L = \widehat{L}$, et comme ce dernier est rationnel, L l'est aussi.

Question 23 Soit L de classe $\mathcal{L}_{\mathrm{ND}_3}$: il existe un a.f.n.d.c. $\mathcal{A} = (Q, \delta)$ dont L est le langage des mots $\mathbf{D_3}$-directeurs. Soit $w \in L$. Soit t un état appartenant à tous les $\delta(q, w)$: w appartient donc à $L_{\to t} = \bigcap\limits_{q\in Q} L_{q\to t}$. Notons $\widehat{L} = \bigcup\limits_{t\in Q} L_{\to t}$. $\widehat{L}$ est rationnel et contient L. Réciproquement, soit $w \in \widehat{L}$: il existe $t \in Q$ tel que $w \in L_{\to t}$, autrement dit $\delta(q, w) = t$ pour tout $q \in Q$, donc w est $\mathbf{D_3}$-directeur de $\mathcal{A}$, donc w appartient à L.

Question 24 Soit $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{CND}_2}$; L n'est pas vide, il est rationnel, et il vérifie $L\Sigma^* = L$; il nous suffit d'établir $\Sigma^* L = L$ pour conclure. Il existe un a.f.n.d.c. $\mathcal{A} = (Q, \delta)$ dont L est le langage des mots $\mathbf{D_2}$-directeurs. Soient q, q' appartenant à Q, $w \in L$ et $u \in \Sigma^*$. Comme $\mathcal{A}$ est complet, $t = q \cdot u$ et $t' = q' \cdot u$ sont deux parties non vides (mais pas nécessairement égales) de Q. Comme $\mathcal{A}$ est $\mathbf{D_2}$-dirigé, $s \cdot w$ ne dépend pas de s$\in Q$, donc $t \cdot w = t' \cdot w$, puis $q \cdot uw = q' \cdot uw$. Fin de la preuve.

Question 25 Soit $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{CND}_1} \cap \mathcal{L}_{\mathrm{ND}_2}$. Alors L n'est pas vide par hypothèse ; il est rationnel (d'après Q21 et Q22) et il vérifie $\Sigma^* L = L$ et $L\Sigma^* = L$, donc $\Sigma^* L \Sigma^* = L$. Avec les résultats des question 11 à 15, nous en déduisons que L est de classe $\mathcal{L}_{\mathrm{D}}$.

Question 26 Soit $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{CND}_1} \cap \mathcal{L}_{\mathrm{ND}_3}$. Nous avons $\Sigma^* L = L$ puisque L est de classe $\mathcal{L}_{\mathrm{CND1}}$. Soit $\mathcal{A}$ un a.f.n.d. tel que $\mathbf{D_3}(\mathcal{A}) = L$, nous allons montrer que $\mathcal{A}$ est complet. Soient $q \in Q$, $x \in \Sigma$ et w un mot $\mathbf{D_3}$-directeur de $\mathcal{A}$. Comme $\Sigma^* L = L$, le mot xw est lui aussi $\mathbf{D_3}$-directeur de $\mathcal{A}$; donc $q \cdot (xw) \neq \emptyset$. Mais $q \cdot (xw) = (q \cdot x) \cdot w$, donc $q \cdot x \neq \emptyset$. Ceci vaut quels que soient $q \in Q$ et $x \in \Sigma$, donc $\mathcal{A}$ est complet. Concluons : L est de classe $\mathcal{L}_{\mathrm{CND}_3}$, donc de classe $\mathcal{L}_{\mathrm{D}}$.

Question 27 Pour l'automate $\mathcal{B}_3$ ci-dessous, le mot a est $\mathbf{D_1}$-directeur mais ba ne l'est pas.

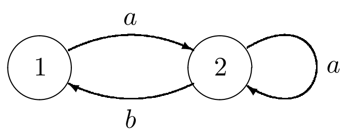

Figure 1: l'automate $\mathcal{B}_3$

Question 28 Pour l'automate $\mathcal{B}_4$ ci-dessous, le mot a est $\mathbf{D_2}$-directeur mais ba ne l'est pas.

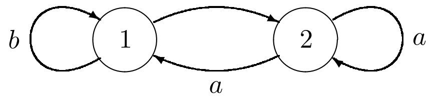

Figure 2: l'automate $\mathcal{B}_4$

Références bibliographiques

▶ Les idées de ce texte proviennent du chapitre *Special classes of regular languages*, dans le livre *Jewels are Forever* (éd. Springer).

▶ On pourra aussi regarder le sujet *Mots synchronisants d'un automate fini*, à l'URL :
`http://bruno.maitresdumonde.com/optinfo/Spe-MP/dmds2004/SyncWords/index.html`

FIN