Option Informatique en Spé MP et MP*

Devoir à rendre après les vacances de la Toussaint

Mots directeurs d'un automate fini

Résumé

Un mot m est *directeur* pour un automate fini déterministe complet $\mathcal{A}$ si l'état $q \cdot m$ dans lequel on se trouve après lecture du mot m ne dépend pas de l'état q dans lequel on commence cette lecture.

Nous étudierons quelques propriétés du langage constitué par les mots directeurs d'un a.f.d.c. En particulier, nous montrerons que ce langage est rationnel

Nous étendrons ensuite la notion de mot directeur aux automates non-déterministes : ceci peut se faire de trois façons différentes, et nous permettra de mettre en évidence d'autres familles de langages rationnels.

Les questions plus délicates sont signalées par une ou deux étoiles ($\star$).

Des indications complémentaires seront affichées (au besoin) ici :

`http://bruno.maitresdumonde.com/optinfo/Spe-MP/dmds2006/dm200601/index.html`

Veuillez rédiger chaque partie sur une copie séparée.

Table des matières

▶ Nous utiliserons le mot *classe* pour désigner un ensemble de langages.

1 Mots directeurs d'un a.f.d.c.

▶ Dans tout le problème, Σ est un alphabet contenant au moins deux lettres. Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta)$ un a.f.d.c. dont nous ne spécifions ni l'état initial, ni l'ensemble des états finals ; nous noterons $\delta(q, m)$ ou $q \cdot m$ l'état dans lequel se retrouve $\mathcal{A}$, placé initialement dans l'état q, après lecture du mot m. Au mot $m \in \Sigma^*$, nous associons la fonction $\mathsf{m} : q \in Q \mapsto q \cdot m$; le *rang* de m est $\rho(m) = |\,\mathsf{m}(Q)|$.

Question 1 Existe-t-il des mots de rang nul ?

Question 2 Soient m_1 et m_2 deux mots ; notons $m = m_1 m_2$. Quelle relation existe-t-il entre les fonctions m_1, m_2 et m ?

Question 3 Soient u, v et m trois mots. Montrez que $\rho(umv) \leqslant \rho(m)$.

▶ Soit $m \in \Sigma^*$. Nous dirons que m est un mot *directeur* de $\mathcal{A}$ s'il est de rang 1, ce qui revient à dire que la fonction m est constante. $\mathcal{A}$ est *dirigé* s'il admet au moins un mot directeur ; nous noterons alors $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ l'ensemble de ses mots directeurs. Illustrons ces définitions par un exemple :

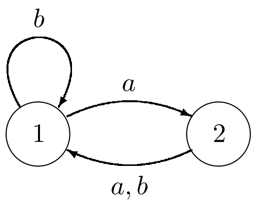

Figure 1: l'automate $\mathcal{A}_2$

b est un mot directeur de l'automate $\mathcal{A}_2$; c'est d'ailleurs le plus court.

Question 4 Déterminez $\mathbf{D}(\mathcal{A}_2)$.

▶ Remarquons que ε est un mot directeur d'un a.f.d.c. $\mathcal{A}$ ssi cet automate possède un seul état, à la fois initial et final. Dans ce cas, $\mathcal{A}$ reconnaît Σ^*. Nous ne considérerons dans la suite que des a.f.d.c. pour lesquels i n'est pas final.

▶ Soient $\mathcal{A}$ un automate et m un mot ; nous dirons que m est injectif pour $\mathcal{A}$ lorsque la fonction m l'est ; ceci revient à dire que $\rho(m) = |Q|$. Clairement, ε est injectif. Pour l'automate $\mathcal{A}_2$, la lettre a est injective et la lettre b ne l'est pas.

Question 5 Soient $\mathcal{A}$ un automate dirigé et m un mot directeur de $\mathcal{A}$, de longueur minimale. Montrez que ni la première lettre, ni la dernière lettre de m ne sont injectives pour $\mathcal{A}$.

Question 6 Quels sont les mots injectifs pour l'automate $\mathcal{A}_3$ ci-dessous ?

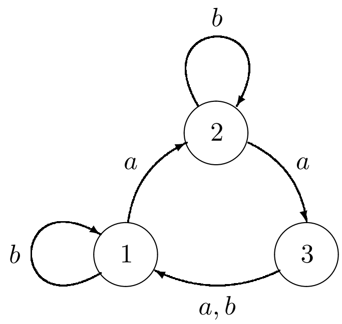

Figure 2: l'automate $\mathcal{A}_3$

Question 7 Montrez que l'automate $\mathcal{A}_3$ est dirigé ; vous déterminez le(s) mot(s) directeurs de longueur minimale de cet automate.

2 Langage des mots directeurs d'un a.f.d.c. dirigé

Question 8 Soient s et t deux états de l'a.f.d.c. $\mathcal{A} = (Q, \delta)$. Notons $L_{s \to t}$ le langage contitué des mot m tels que $\delta(s, m) = t$. Rappelez brièvement pourquoi $L_{s \to t}$ est rationnel.

▶ Notons $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots directeurs d'un a.f.d.c. dirigé $\mathcal{A} = (Q, \delta)$. Par définition, $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ n'est pas vide.

▶ Nous dirons qu'un langage L est dans la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{D}}$ s'il existe un a.f.d.c. dirigé $\mathcal{A}$ tel que $L = \mathbf{D}(\mathcal{A})$. Nous donnons dans cette partie une caractérisation simple des éléments de $\mathcal{L}_{\mathrm{D}}$.

▶ Soit donc $\mathcal{A} = (Q, \delta)$ un a.f.d.c. dirigé, et $L = \mathbf{D}(\mathcal{A})$ l'ensemble de ses mots directeurs.

Question 9 Montrez que L est rationnel.

Question 10 Montrez que L vérifie $L = \Sigma^* L \Sigma^*$.

▶ Nous nous proposons d'établir la réciproque : si L est un langage rationnel non vide vérifiant $L = \Sigma^* L \Sigma^*$, alors L est le langage des mots directeurs d'un a.f.d.c. dirigé. La preuve que nous allons donner est constructive.

▶ Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un a.f.d.c. reconnaisant L ; remarquons que F n'est pas vide. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que tous les états de $\mathcal{A}$ sont accessibles.

Question 11 Soit $x \in \Sigma$. Prouvez l'implication suivante : $q \in F \Rightarrow \delta(q, x) \in F$.

▶ Définissons un automate $\mathcal{A}' = (Q', \delta', i, \{\omega\})$ comme suit (x désigne une lettre quelconque de Σ) :

- ω est un nouvel état ;
- Q' est obtenu en ajoutant ω à $Q - F$ (ensemble des états non finals de $\mathcal{A}$) ;
- $\delta'(q, x) = \delta(q, x)$ si $\delta(q, x) \in Q - F$;
- $\delta'(q, x) = \omega$ si $\delta(q, x) \in F$;
- $\delta'(\omega, x) = \omega$.

Il est clair que $\mathcal{A}'$ est déterministe et complet.

Question 12 Montrez que tous les états de $\mathcal{A}'$ sont accessibles.

Question 13 $\star$ Montrez que $\mathcal{A}'$ reconnaît le même langage que $\mathcal{A}$.

Question 14 Montrez que tout mot u de L est directeur de $\mathcal{A}'$.

Question 15 Réciproquement, montrez que tout mot directeur de $\mathcal{A}'$ appartient à L.

Question 16 La classe $\mathcal{L}_{\mathrm{D}}$ est-elle stable par réunion ?

3 Langage des mots directeurs d'un a.f.n.d.c.

▶ Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta)$ un automate non-déterministe, dont nous ne spécifions ni les états initiaux, ni les états finals. Dans cette partie, nous noterons $\delta(q, u)$ ou $q \cdot u$ l'ensemble des états que $\mathcal{A}$, placé dans l'état q, peut atteindre en lisant le mot u ; cet ensemble peut être vide.

▶ Nous pouvons définir la notion de mot directeur d'un a.f.n.d. par l'une des trois conditions suivantes :

- $(\mathbf{D_1})$ il existe un état t tel que $\delta(q, w) = \{t\}$ quel que soit $q \in Q$;
- $(\mathbf{D_2})$ $\delta(q, w)$ ne dépend pas de $q \in Q$;
- $(\mathbf{D_3})$ il existe un état t qui appartient à tous les $\delta(q, w)$.

Nous dirons que le mot w est $\mathbf{D_i}$-directeur de $\mathcal{A}$ s'il vérifie la condition $\mathbf{D_i}$ ($\mathbf{i}$ valant 1, 2 ou 3). L'ensemble des mots $\mathbf{D_i}$-directeurs de $\mathcal{A}$ sera noté $\mathbf{D_i}(\mathcal{A})$; lorsque cet ensemble n'est pas vide, nous dirons que $\mathcal{A}$ est $\mathbf{D_i}$-dirigé.

▶ Il est clair que la condition $(\mathbf{D_1})$ implique les conditions $(\mathbf{D_2})$ et $(\mathbf{D_3})$.

Question 17 Soit $\mathcal{A}$ un a.f.n.d. $\mathbf{D_2}$ dirigé. Prouvez l'égalité $\mathbf{D_2}(\mathcal{A})\Sigma^* = \mathbf{D_2}(\mathcal{A})$.

Question 18 Vérifiez que l'a.f.n.d. $\mathcal{B}_2$ de la figure 3 est $\mathbf{D_2}$-dirigé, mais qu'il n'existe aucun a.f.d.c. $\mathcal{A}$ tel que $\mathbf{D_2}(\mathcal{B}_2) = \mathbf{D}(\mathcal{A})$.

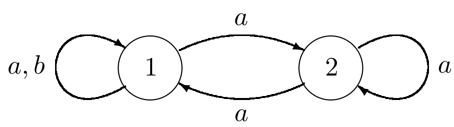

Figure 3: l'automate $\mathcal{B}_2$

▶ Nous dirons que l'a.f.n.d. $\mathcal{A}$ est *complet* si, quels que soient $q \in Q$ et $x \in \Sigma$, l'ensemble $\delta(q, x)$ n'est pas vide.

Question 19 Soit $\mathcal{A}$ un a.f.n.d.c. $\mathbf{D_1}$-dirigé. Prouvez l'égalité $\Sigma^*\mathbf{D_1}(\mathcal{A}) = \mathbf{D_1}(\mathcal{A})$.

Question 20 Soit $\mathcal{A}$ un a.f.n.d.c. $\mathbf{D_3}$-dirigé. Prouvez l'égalité $\Sigma^*\mathbf{D_3}(\mathcal{A})\Sigma^* = \mathbf{D_3}(\mathcal{A})$.

▶ Pour $\mathbf{i}$ valant 1, 2 ou 3, nous définissons la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{ND_i}}$ comme l'ensemble des $\mathbf{D_i}(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ parcourt l'ensemble des a.f.n.d. $\mathbf{D_i}$-dirigés. Nous définissons de même la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{CND_i}}$, en remplaçant a.f.n.d. par a.f.n.d.c. Ainsi, à la question 18, nous avons montré que la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{D}}$ est strictement contenue dans la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{ND_2}}$.

Question 21 $\star$ Montrez que la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{ND_1}}$ ne contient que des langages rationnels.

Question 22 $\star\star$ Montrez que la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{ND_2}}$ ne contient que des langages rationnels.

Question 23 $\star$ Montrez que la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{ND_3}}$ ne contient que des langages rationnels.

Question 24 Prouvez l'égalité $\mathcal{L}_{\mathrm{D}} = \mathcal{L}_{\mathrm{CND_2}}$.

▶ On montrerait de même l'égalité $\mathcal{L}_{\mathrm{D}} = \mathcal{L}_{\mathrm{CND_3}}$.

Question 25 Prouvez l'égalité $\mathcal{L}_{\mathrm{D}} = \mathcal{L}_{\mathrm{CND_1}} \cap \mathcal{L}_{\mathrm{ND_2}}$.

Question 26 $\star$ Prouvez l'égalité $\mathcal{L}_{\mathrm{D}} = \mathcal{L}_{\mathrm{CND_1}} \cap \mathcal{L}_{\mathrm{ND_3}}$.

Question 27 Exhibez un a.f.n.d. $\mathbf{D_1}$-dirigé $\mathcal{B}_1$ tel que $\mathbf{D_1}(\mathcal{B}_1)$ n'appartienne pas à la classe $\mathcal{L}_{\mathrm{D}}$.

Question 28 Même question, avec la condition $\mathbf{D_3}$.

FIN