# Option Informatique en Spé MP et MP$^*$
# DS du mercredi 22 mars 2006 : le corrigé

## La suite de Stern

***Question 1*** • $b(10) = 5$ car $10 = 8+2 = 8+1+1 = 4+4+2 = 4+4+1+1 = 4+2+2+1+1$.

***Question 2*** • Remarquons que le nombre de façons de payer $b(2k)$ sans utiliser de pièce 1 est égal à $b(k)$ (imaginez une dévaluation de 50%). Pour payer $2k+1$, nous devons verser une et une seule pièce 1, puis régler $2k$ sans utiliser de pièce 1 ; donc $b(2k+1) = b(k)$. Pour payer $2k+2$, nous pouvons, soit utiliser deux pièces 1, puis régler $2k$ sans utiliser de pièce 1 ; soit régler le total en n'utilisant aucune pièce 1 ; avec la remrque, il vient $b(2k+2) = b(k+1) + b(k)$.

***Question 3*** •

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b(k)$ | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 | 5 |

***Question 4*** • $b(0) = 1$ pour deux raisons : il n'existe qu'une façon de régler une somme nulle ; et la formule $b(2k+1) = b(k)$ sera valable même pour $k = 0$.

***Question 5*** • Traduction immédiate de l'algorithme :

```
let rec b = function
 | 0 -> 1
 | n when n mod 2 = 1 -> b(n/2)
 | n -> b(n/2)+b(n/2-1) ;;
```

***Question 6*** • $\alpha_{p+1} = 2^{p+1} - 1 = 2 \times (2^p - 1) + 1 = 2\alpha_p + 1$, donc $b(\alpha_{p+1}) = b(2\alpha_p + 1) = b(\alpha_p)$. Ceci montre que la suite de terme général $b(\alpha_p)$ est constante ; or $\alpha_0 = 2^0 - 1 = 1$, donc $b(\alpha_0) = b(0) = 1$ ; donc $b(\alpha_p) = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

• $\alpha_{p+1} + 1 = 2^{p+1} = 2 \times (2^p - 1) + 2 = 2 \times \alpha_p + 2$ ; donc $b(\alpha_{p+1} + 1) = b(\alpha_p) + b(\alpha_p + 1) = b(\alpha_p + 1) + 1$. La suite de terme général $b(\alpha_p + 1)$ est donc arithmétique, de raison 1 ; son premier terme est $b(\alpha_0 + 1) = b(1) = 1$, donc $b(\alpha_p + 1) = p + 1$.

***Question 7*** • Les quatre premières sommes sont 1, 3, 9 et 27 : ceci suggère fortement la formule $S(p) = 3^p$. Supposons-la acquise au rang $p \geqslant 0$. Dans la tranche $p+1$, séparons les termes selon la parité de leur indice.

- les termes d'indice impair sont les $b(\alpha_{p+1} + 2q)$ avec $0 \leqslant q < 2^p$ ; mais $b(\alpha_p + 2q) = b(2^{p+1} - 1 + 2q) = b\big(2(2^p + q - 1) + 1\big) = b(2^p + q - 1) = b(\alpha_p + q)$ ; leur contribution est donc $\sum_{0 \leqslant q < 2^p} b(\alpha_p + q)$, soit précisément $S(p)$ ;
- les termes d'indice pair sont les $b(\alpha_{p+1} + 1 + 2q)$ avec $0 \leqslant q < 2^p$ ; mais $b(\alpha_{p+1} + 1 + 2q) = b(2^{p+1} + 2q) = b\big(2(2^p + q - 1) + 2\big) = b(2^p + q - 1) + b(2^p + q) = b(\alpha_p + q) + b(\alpha_p + q + 1)$ ; leur contribution est donc $\sum_{0 \leqslant q < 2^p} b(\alpha_p + q) + \sum_{0 \leqslant q < 2^p} b(\alpha_p + q + 1) = \sum_{0 \leqslant q < 2^p} b(\alpha_p + q) + \sum_{0 < q \leqslant 2^p} b(\alpha_p + q)$. La première de ces deux sommes est $S(p)$ ; la deuxième est $S(p) - b(\alpha_p) + b(\alpha_{p+1})$, or $b(\alpha_p) = b(\alpha_{p+1}) = 1$, si bien que la contribution des termes d'indice pair et $2S(p)$.

Le total est donc $3S(p)$, ce qui termine la preuve.

***Question 8*** • Le résultat est clair pour $0 \leqslant k \leqslant 6$. Supposons-le acquis pour $0 \leqslant k \leqslant 6n$, avec $n \geqslant 1$. Alors, les calculs étant réalisés modulo 2 : $b(6n+1) = b(3n) = 1$ ; $b(6n+2) = b(3n+1) + b(3n) = 1 + 1 = 0$ ; $b(6n+3) = b(3n+1) = 1$ ; $b(6n+4) = b(3n+2) + b(3n+1) = 1$ ; $b(6n+5) = b(3n+2) = 0$. Ceci établit le résultat pour $0 \leqslant k \leqslant 6(n+1)$. Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$.

***Question 9*** • `toto` s'applique à un argument `(u,v,r)` qui, compte tenu de l'utilisation qui est faite des trois noms dans les motifs, est de type `int * int * int`. Le type du résultat rendu est `int`, au vu premier motif. Donc le type de `toto` est `int * int * int -> int`

***Question 10*** • La valeur initiale de $r$ est positive ou nulle ; chaque accord avec le deuxième ou le troisième motif remplace $r > 0$ par $\lfloor r/2 \rfloor$, et fait donc décroître strictement $r$. Ceci prouve que le programme termine. Le nombre d'itérations est l'entier $k$ tel que $2^{k-1} \leqslant r < 2^k$, soit $\lfloor \lg(r) \rfloor + 1$ pour $r \geqslant 1$.

***Question 11*** • Il faut distinguer deux cas selon la parité de $r_k$ :

- $r_k = 2q$ : alors $r_{k+1} = q$, $u_{k+1} = u_k$, $v_{k+1} = u_k + v_k$, $b(r_k) = b(2q) = b(q) + b(q-1)$ et $b(r_k - 1) = b(2q-1) = b(q-1)$ ; donc $u_{k+1}b(r_{k+1}) + v_{k+1}b(r_{k+1}-1) = u_k b(q) + (u_k + v_k)b(q-1) = u_k\big(b(q) + b(q-1)\big) + v_k b(q-1) = u_k b(r_k) + v_k b(r_k - 1)$ ;

- $r_k = 2q+1$ : alors $r_{k+1} = q$, $u_{k+1} = u_k + v_k$, $v_{k+1} = u_k$, $b(r_k) = b(2q+1) = b(q)$ et $b(r_k - 1) = b(2q) = b(q) + b(q-1)$ ; donc $u_{k+1}b(r_{k+1}) + v_{k+1}b(r_{k+1}-1) = (u_k + v_k)b(q) + v_k b(q-1) = u_k b(q) + v_k\big(b(q) + b(q-1)\big) = u_k b(r_k) + v_k b(r_k - 1)$.

Donc, dans les deux cas, les quantités $u_{k+1}b(r_{k+1}) + v_{k+1}b(r_{k+1}-1)$ et $u_k b(r_k) + v_k b(r_k - 1)$ sont égales, ce qui termine la preuve.

***Question 12*** • Avec l'appel `toto (1,0,n)`, nous aurons $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $r_0 = n$, donc la valeur initiale de la quantité $u_k b(r_k) + v_k b(r_k - 1)$ est $b(n)$. Notons $\lambda$ la valeur finale de $k$ ; nous avons $r_\lambda = 0$ et donc $r_{\lambda-1} = 1$ puisque $r_\lambda = \lfloor r_{\lambda-1}/2 \rfloor$, et $r_{\lambda-1} \neq 0$. Donc $b(n) = u_\lambda b(r_\lambda) + v_\lambda b(r_\lambda - 1) = u_\lambda b(0) + v_\lambda b(-1)$ ; en remplaçant $k$ par $-1$ dans la relation $b(2k+2) = b(k+1) + b(k)$, nous obtenons $b(-1) = 0$. Ainsi $b(n) = u_\lambda$, donc la valeur rendue est bien $b(n)$.

## L'arbre de Calkin-Wilf

***Question 13*** • Il s'agit d'un arbre infini, ce qui pose problème quel que soit le type de parcours envisagé ; dans le cas du parcours en profondeur, on ne peut visiter que les nœuds les plus à gauche, donc de la forme $1/k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

***Question 14*** • Il suffit de noter que $m \wedge (m+n) = m \wedge n$ et $(m+n) \wedge n = m \wedge n$.

▶ Remarquons que la fraction $1/1$ ne peut pas apparaître ailleurs qu'à la racine.

***Question 15*** • Supposons qu'au moins une fraction $\frac{m}{n}$ irréductible est absente de l'arbre. Considérons (sans perte de généralité) une telle fraction, qui minimise $m+n$. Il est clair que ce n'est pas $1/1$. Si $m < n$, la fraction $(n-m)/m$ est absente de l'arbre (sinon $m/n$ en serait le fils gauche) ; et si $m > n$, la fraction $n/(m-n)$ est absente de l'arbre (sinon $m/n$ en serait le fils droit). Ceci contredit l'hypothèse de minimalité faite sur $m+n$.

***Question 16*** • Supposons que la fraction $m/n$ apparaît au moins deux fois dans l'arbre ; Considérons (sans perte de généralité) une telle fraction, qui minimise $m+n$. Il est clair que ce n'est pas $1/1$. Si $m < n$, alors les deux occurrences de $m/n$ sont des fils gauches de deux occurrences de $(n-m)/m$, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité. Raisonnement analogue si $m > n$, en remplaçant ≪gauches≫ par ≪droits≫ et $(n-m)/m$ par $n/(m-n)$.

***Question 17*** • Nous raisonnons par récurrence sur la profondeur à laquelle est située la fraction $r(k)$. Le résultat est clair pour les fractions situées aux profondeurs 0, 1 et 2. Supposons-le acquis pour les fractions situées à la profondeur $p$, et observons les fractions situées à la profondeur $p+1$. La première est $1/(p+2)$, son numérateur est bien le dénominateur de la fraction $(p+1)/1$ située tout à fait à droite de la rangée précédente ; ensuite, chaque fraction ≪fils gauche≫ est de la forme $m/(m+n)$, alors que sa voisine de droite est $(m+n)/n$ ; enfin, chaque fraction ≪fils droit≫ est de la forme $(m+n)/n$, et sa voisine de droite de la forme $m'/(m'+n')$ ; or ces deux fractions sont le fils droit (resp. gauche) de $m/n$ (resp. $m'/n'$), qui sont consécutives, dans la rangée précédente ; donc $m' = n$ de par l'hypothèse de récurrence. Le résultat est donc acquis pour les fractions situées à la profondeur $p+1$.

***Question 18*** • Il suffit de montrer que les deux suites sont définies par les mêmes relations. Remarquons que les fils gauche et droit de la fraction $f(k)$ sont les fractions $f(2k+1)$ et $f(2k+2)$. Nous avons déjà $f(0)1$. Considérons maintenant les fils gauche et droit de la fraction $f(k) = m/n$ ; ce sont $f(2k+1) = m/(m+n)$ et $f(2k+2) = (m+n)/n$. Alors $r(2k+1) = m = r(k)$ et $r(2k+2) = m+n = r(k) + r(k+1)$. Fin de la preuve.

***Question 19*** • Raisonnons par récurrence sur $p$. Par examen des niveaux 1 à 3 de $\mathsf{CW}$, nous constatons que l'assertion est vraie pour aux rangs 1, 2 et 3. Supposons-la acquise au rang $p \geqslant 3$. Soit $j \in [\![0, 2^{p-2} - 1]\!]$ ; les fractions $r_{2j}$ et $r_{2j+1}$ sont les fils gauche et de droit d'une même fraction $m/n$, située à la position $j$ dans la rangée $p$ ; nous aurons $r_{2j} = m/(m+n)$ et $r_{2j+1} = (m+n)/n$. Les fractions $r_{2^p-2j-2}$ et $r_{2p-2j-1}$ sont les fils gauche et droit d'une même fraction, située à la position $2^p - j - 1$ dans la rangée $p$. De par l'hypothèse de récurrence, cette fraction est $n/m$, donc $r_{2^p-2j-2} = n/(n+m)$ et $r_{2^p-2j-1} = (n+m)/m$, qui sont les inverses respectives de $r_{2j}$ et $r_{2j+1}$.

***Question 20*** • La formule est vraie pour $p = 1$. Observons que, d'une fraction $m/n$ située à la profondeur $p$ et contribuant donc pour $1/mn$ à $\Sigma(p)$, se déduisent deux fractions $m/(m+n)$ et $(m+n)/n$ située à la profondeur $p+1$, qui vont contribuer à $\Sigma(p+1)$ pour un total de $\frac{1}{m(m+n)} + \frac{1}{(m+n)n} = \frac{n+m}{m(m+n)n} = \frac{1}{mn}$. Donc $\Sigma(p+1) = \Sigma(p)$, ce qui montre que les $\Sigma(p)$ sont toutes égales à 1.

## La formule de Moshe Newman

***Question 21*** • Nous simulons un cheminement partant du nœud $m/n$ et remontant à la racine. Si $m > n$, le nœud considéré est un fils droit ; on écrit donc D et son père est $(m-n)/m$ ; sinon, c'est un fils gauche, auquel cas on écrit G et son père est $m/(n-m)$. Traduction immédiate ; le `rev` final découle du sens de parcours.

```
let psi m n =
 let rec aux = function
  | (1,1) -> []
  | (m,n) when m>n -> D::(aux (m-n,n))
  | (m,n) -> G::(aux(m,n-m))
 in rev(aux(m,n)) ;;
```

***Question 22*** • Suivre le chemin étiqueté $w$ est immédiat ; nous maintenons l'étiquette $m/n$ du nœud courant :

```
let inv_psi w =
 let rec aux (m,n) = function
  | [] -> (m,n)
  | G::q -> aux (m,m+n) q
  | D::q -> aux(m+n,n) q
 in aux (1,1) w ;;
```

***Question 23*** • Remontons à la racine en partant de 14/11, puis de 23/2 :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 14/11 & \to & 3/11 & \to & 3/8 & \to & 3/5 & \to & 3/2 & \to & 1/2 & \to & 1/1 \\ 23/2 & \to & 21/2 & \to & \cdots & \to & 5/2 & \to & 3/2 & \to & 1/2 & \to & 1/1 \end{array}$$

Le premier ancêtre commun est donc 3/2.

***Question 24*** • Partant des couples $(m,n)$ et $(m',n')$ nous construisons avec `psi` les chemins associés ; la fonction `plpc` calcule le plus long préfixe commun à deux listes ; au résultat obtenu, nous appliquons `inv_psi`.

```
let rec plpc = function
 | (t::q),(t'::q') when t=t' -> t::(plpc (q,q'))
 | _ -> [] ;;

let pac (m,n) (m',n') = inv_psi(plpc(psi m n,psi m' n')) ;;
```

***Question 25*** • Nous vérifions rapidement que la formule proposée est vraie pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$. Supposons-la acquise pour tous les nœuds situés à une profondeur au plus $p$. Considérons les nœuds situés à la profondeur $p+1$, en distinguant trois cas de figure :

- $r(k)$ et $r(k+1)$ sont les fils gauche et droit d'un même nœud $m/n$ situé à la profondeur $p$ ; alors $x = r(k) = m/(m+n)$ et $y = r(k+1) = (m+n)/n$ ; donc $\lfloor x \rfloor = 0$ et du coup $\varphi(x) = 1/(1-x) = (m+n)/n = y$ ;
- $x = r(k)$ est le dernier nœud de la rangée considérée ; alors $x = r(k) = p+1$, donc $\lfloor x \rfloor = x$ puis $y = \varphi(x) = 1/(x+1) = 1/(p+1) = r(k+1)$ ;
- $x = r(k)$ est un fils gauche et $y = r(k+1)$ un fils droit. Soit $t$ le premier ancêtre commun de $r(k)$ et $r(k+1)$, et $\delta$ la différence entre les profondeurs de $t$ de de $r(k)$. Le chemin menant de $t$ à $x'$ a pour étiquette $\mathsf{GD}^{\delta-1}$, celui qui mène de $t$ à $y'$ a pour étiquette $\mathsf{DG}^{\delta-1}$. Les fils gauche et droit de $t$ sont $\frac{t}{1+t}$ et $t+1$ ; donc $x = \frac{t}{1+t} + \delta - 1$, tandis que $y = \frac{t+1}{1+(\delta-1)(t+1)}$. Alors $\varphi(x) = \frac{1}{\delta - t/(1+t)} = \frac{t+1}{\delta(t+1)-t}$ ce qui termine la preuve.

***Question 26*** • Le résultat est clair pour le nœud $1/1$. Supposons-le acquis pour le nœud $m/n$, et notons $w = \psi(m/n)$ ; le fils gauche de $m/n$ est $m/(m+n)$, or

$$\Phi(\widetilde{w\mathsf{G}}) \times \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \Phi(\mathsf{G}\widetilde{w}) \times \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \Phi(\mathsf{G}) \times \Phi(\widetilde{w}) \times \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \Phi(\mathsf{G}) \times \begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m\\m+n\end{pmatrix}$$

La preuve est analogue pour le fils droit. Par induction structurelle, la relation vaut pour tout nœud de $\mathsf{CW}$.

***Question 27*** • La figure 1 représente les quatre premiers niveaux de l'arbre $\mathsf{SB}$ (arbre de STERN-BROCOT).

```
                    1/1
              /            \
          1/2                  2/1
         /   \                /   \
      1/3     2/3          3/2     3/1
      / \     / \          / \     / \
   1/4  2/5  3/5  3/4   4/3  5/3  5/2  4/1
```

Figure 1: les quatre premiers niveaux de l'arbre $\mathsf{SB}$

***Question 28*** • Soient $x$ un nœud de $\mathsf{SB}$ et $y$ un nœud du sous-arbre droit de $x$. Prouvons $x < y$ ; par raison de symétrie, nous aurons $y < x$ lorsque $y$ est un nœud du sous-arbre gauche et la preuve sera complète. Notons $u$ le mot associé à $x$ dans $\mathsf{SB}$ ; le mot associé à $y$ est de la forme $u\mathsf{D}v$. Notons $x'$ le nœud de $\mathsf{CW}$ associé au mot $\widetilde{u}$, et $y'$ le nœud de $\mathsf{CW}$ associé au mot $\widetilde{u\mathsf{D}v} = \widetilde{v}\mathsf{D}\widetilde{u}$. Il reste à établir $x' < y'$. Notons $t$ le fils droit de $y'$ : $t > 1$. Mais le chemin qui mène de $1/1$ à $x'$ est le même que celui qui mène de $t$ à $y'$ ; il suffit donc d'établir le résultat suivant : si $m/n < m'/n'$, alors $m/(m+n) < m'/(m'+n')$ et $(m+n)/n < (m'+n')/n'$. Le deuxième est immédiat, puisque $(m+n)/n = m/n+1 < m'/n'+1 = (m'+n')/n'$ ; le premier s'en déduit par un passage aux inverses (licite car tous les nombres manipulés sont strictement positifs) : $m/n < m'/n' \Rightarrow n'/m' < q/p \Rightarrow (m'+n')/m' < (m+n)/p \Rightarrow m/(m+n) < m'/(m'+n')$.

## L'algorithme binaire d'Euclide

***Question 29*** • Traduction immédiate :

```
let rec pgcd = function
 | (a,0) -> a
 | (a,b) -> pgcd(b,a mod b) ;;
```

***Question 30*** • La suite des couples obtenus est : $(13,8) \to (5,8) \to (5,3) \to (2,3) \to (2,1) \to (1,1)$. Il y a du FIBONACCI dans l'air ...

***Question 31*** • Chaque passage par l'une des étapes 2 ou 3 diminue strictement l'un des deux nombres, donc leur somme. Au bout de $a+b-1$ étapes au plus, on atteint un couple de la forme $(r,r)$. Donc l'algorithme termine dans tous les cas (sous l'hypothèse $a > 0$ et $b > 0$).

***Question 32*** • Il suffit de remarquer que $(a-b) \wedge b = a \wedge (b-a) = a \wedge b$. Cette assertion se conserve au cours de l'algorithme ; lorsque celui-ci termine, c'est sur un couple $(r,r)$ or $r \wedge r = r$.

***Question 33*** • Traduction immédiate de l'algorithme :

```
let pgcd a b =
 let rec aux = function
  | (u,v) when u>v -> aux(u-v,v)
  | (u,v) when u<v -> aux(u,v-u)
  | (u,v) -> u
 in aux(a,b) ;;
```

***Question 34*** • $\tau(a,b)$ est le miroir du mot qui mène de la racine de l'arbre $\mathsf{CW}$ au nœud étiqueté $a/b$.

▶ Source : Neil CALKIN and Herbert WILF, *Recounting the Rationals*, American Mathematical Monthly 107 (2000) 360–363. Et un grand merci à Nicolas PUECH !

**FIN**