

Option Informatique en Spé MP et MP*

Devoir surveillé du mercredi 22 mars 2006

Résumé

La première partie du problème étudie la suite de STERN ; cette suite de naturels a été découverte ou redécouverte par DE RAHM, DIJKSTRA et d'autres. Elle possède plusieurs définitions, nous en verrons deux.

La deuxième partie présente un objet mathématique découvert récemment, l'arbre de CALKIN-WILF : les nœuds de cet arbre infini fournissent une énumération exhaustive et sans doublon des rationnels positifs ; la suite de STERN apparaît naturellement lorsque l'on observe cet arbre.

Numérotons les nœuds de l'arbre de CALKIN-WILF dans un parcours en largeur. Moshe NEWMAN a établi une formule permettant le calcul du k -ième nœud par itération d'une fonction très simple. La troisième partie prouve cette formule.

Enfin, la quatrième partie montre le lien entre l'arbre de CALKIN-WILF et la version «binaire» de l'algorithme d'EUCLIDE pour le calcul du PGCD.

Les questions plus délicates sont signalées avec une ou deux étoiles.

Veillez rédiger chaque partie sur une copie séparée.

Table des matières

1	La suite de Stern	2
2	L'arbre de Calkin-Wilf	3
3	La formule de Moshe Newman	4
4	L'algorithme binaire d'Euclide	5

- ▶ Dans tout le texte, $a \wedge b$ désigne le PGCD des naturels a et b .
- ▶ \tilde{w} désigne le miroir du mot w : $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, et $w_1 \dots w_n = w_n \dots w_1$.
- ▶ La suite de FIBONACCI est définie par les valeurs $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et la relation $F_{p+2} = F_{p+1} + F_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

1 La suite de Stern

▶ Sur la planète Fusc, l'unité monétaire est le *pédro*. Les autorités ont mis en circulation des pièces de monnaie de 1, 2, 4, 8 pédros et ainsi de suite. Selon une tradition locale qui se perd dans la nuit des temps, payer un objet en utilisant plus de deux pièces de la même valeur est considéré par le vendeur comme une très grave injure. Ainsi, on peut régler un café qui coûte 5 pédros de deux façons : avec deux pièces (une de 4 pédros et une de 1 pédro) ou trois pièces (deux de 2 pédros et une de 1 pédro). Mais régler avec une pièce de 2 pédros et trois de 1 pédro, ou avec cinq pièces de 1 pédro, vaut bannissement définitif de l'établissement !

▶ Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $b(k)$ le nombre de décompositions de k en somme de puissances de 2, utilisées chacune au plus deux fois. Par exemple, $b(5) = 2$ car on peut écrire $5 = 4 + 1$ et $5 = 2 + 2 + 1$.

Question 1 Déterminez $b(10)$, en énumérant les décompositions de 10.

Question 2 Pour $k \geq 1$, prouvez les relations $b(2k + 1) = b(k)$ et $b(2k + 2) = b(k + 1) + b(k)$.

Question 3 Dressez un tableau donnant la valeur de $b(k)$ pour $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$. On ne vous demande aucune justification.

Question 4 Quelle valeur est-il raisonnable de donner à $b(0)$? Vous donnerez deux arguments à l'appui de votre réponse.

Question 5 Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
b : int -> int
```

spécifiée comme suit : `b k` calcule $b(k)$. Vous ne traiterez pas le cas où k est négatif. Objectif : quatre lignes.

▶ Décomposons la suite en «tranches» : $\mathcal{I}_0 = [b(0)]$; $\mathcal{I}_1 = [b(1), b(2)]$; $\mathcal{I}_2 = [b(3), b(4), b(5), b(6)]$ et ainsi de suite. La p -ième tranche est donc une liste de 2^p termes de la suite. Clairement l'indice du premier terme de la p -ième tranche est $\alpha_p = 2^p - 1$.

Question 6 Donnez des expressions simples de $b(\alpha_p)$ et $b(\alpha_p + 1)$.

Question 7 Donnez une expression simple de la somme $S(p)$ des termes de la p -ième tranche.

Question 8 Montrez que $b(k)$ est pair si et seulement si $k - 2$ est multiple de 3.

▶ Nous nous intéressons à la fonction Caml suivante :

```
let rec toto = fonction
  | (u,v,0) -> u
  | (u,v,r) when r mod 2 = 1 -> toto(u+v,v,r/2)
  | (u,v,r) -> toto(u,u+v,r/2) ;;
```

Question 9 Quel est le type de `toto` ?

Question 10 Montrez que, si $r \geq 0$, le calcul de `toto(u,v,r)` termine toujours ; vous indiquerez le nombre d'appels récursifs de `toto` effectués lors de ce calcul.

Question 11 Notons u_k , v_k et r_k les valeurs auxquels sont liés les noms `u`, `v` et `r` après k étapes. Montrez que la quantité $u_k b(r_k) + v_k b(r_k - 1)$ ne dépend pas de k .

Question 12 Supposons que le nom `n` est lié à un entier non négatif. Que calcule `toto (1,0,n)` ?

2 L'arbre de Calkin-Wilf

► Dans toute la suite, «fraction» signifie «élément de \mathbb{Q}_+^* ».

► L'arbre de CALKIN-WILF est un arbre binaire infini dont les nœuds sont étiquetés par des fractions. Plus précisément : la racine est étiquetée par la fraction $\frac{1}{1}$; les fils gauche et droit de la fraction $\frac{m}{n}$ sont étiquetés respectivement par les fractions $\frac{m}{m+n}$ et $\frac{m+n}{n}$. Nous noterons cet arbre CW ; la figure 1 montre les nœuds de cet arbre situés à la profondeur 3 au plus.

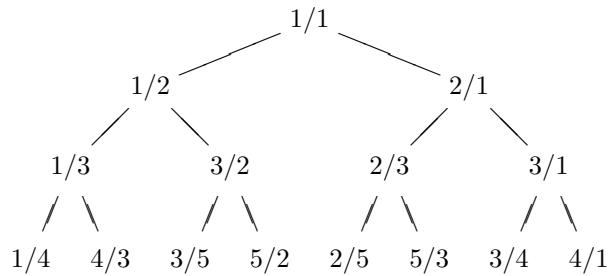


Figure 1: les quatre premiers niveaux de CW

► Il est clair que les fractions qui apparaissent dans CW sont toutes strictement positives.

Question 13 Que se passe-t-il si l'on tente un parcours en profondeur de cet arbre ?

Question 14 Montrez que toutes les fractions qui apparaissent dans l'arbre sont irréductibles.

Question 15 Montrez que toute fraction $\frac{m}{n}$ irréductible apparaît dans l'arbre.

Question 16 Montrez qu'aucune fraction n'apparaît deux fois dans l'arbre.

► Les résultats des deux questions précédentes montrent que dresser la liste des étiquettes de CW dans un parcours en largeur revient à énumérer les éléments de \mathbb{Q}_+^* . Les sept premiers termes de cette énumération sont $r(0) = \frac{1}{1}$, $r(1) = \frac{1}{2}$, $r(2) = \frac{2}{1}$, $r(3) = \frac{1}{3}$, $r(4) = \frac{3}{2}$, $r(5) = \frac{2}{3}$ et $r(6) = \frac{3}{1}$.

Question 17 Montrez que le dénominateur de $r(k)$ est égal au numérateur de $r(k+1)$.

► Pour $k \geq 0$, notons $f(k)$ le numérateur de $r(k)$; ainsi, les quinze premiers termes de la suite de terme général $f(k)$ sont 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4.

Question 18 La suite $(b(k))_{k \in \mathbb{N}}$ a été définie dans la partie 1. Montrez que $f(k) = b(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Question 19 Soit $p > 0$. Notons $[\varphi(0), \dots, \varphi(2^p - 1)]$ la liste des 2^p fractions situées à la profondeur p dans l'arbre. Montrez que la liste $[r(2^{p-1}), \dots, r(2^p - 1)]$ est le miroir de la liste $[1/r(0), \dots, 1/r(2^{p-1} - 1)]$.

Question 20 Soit $\tau = m/n$ une fraction irréductible ; notons $\mu(\tau) = 1/mn$. Notons $\Sigma(p)$ la somme des $\mu(\tau)$, où τ décrit la liste des 2^p fractions situées à la profondeur p . Quelle est la valeur de $\Sigma(p)$?

3 La formule de Moshe Newman

► Observons que, dans CW, le chemin qui mène de la racine $1/1$ au nœud m/n situé à la profondeur p est formé de p pas vers la gauche ou vers la droite. Nous pouvons donc coder ce chemin par un mot w de longueur p sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{G, D\}$. Par exemple, pour atteindre le nœud $5/2$, nous suivons le chemin GDD. Nous noterons ψ la fonction qui, à la fraction irréductible m/n , associe le mot w codant le chemin menant de la racine à m/n . Clairement, ψ est une bijection de l'ensemble des nœuds de l'arbre sur \mathcal{A}^* .

► Pour la programmation, un mot sur l'alphabet \mathcal{A} sera représenté par une `dir list`, où le type `dir` a été défini comme suit :

```
type dir = G | D ;;
```

Question 21 Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
psi : int -> int -> dir list
```

spécifiée comme suit : `psi m n` calcule $\psi(m/n)$. Ainsi, `psi 2 5` rendra la liste `[D;G;G]`. Objectif : six lignes.

Question 22 Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
inv_psi : dir list -> int * int
```

spécifiée comme suit : `inv_psi w` calcule $\psi^{-1}(w)$. Ainsi, `inv_psi [D;G;G]` rendra le couple $(2, 5)$. Objectif : six lignes.

► Dans un arbre binaire, deux nœuds ont au moins un ancêtre commun, à savoir la racine ; en général, ils en ont plusieurs : par exemple, dans l'arbre CW, les nœuds $1/4$ et $3/2$ ont deux ancêtres communs, qui sont $1/2$ et $1/1$. Nous nous intéressons au *premier* ancêtre commun, c'est-à-dire celui de profondeur maximale ; dans le cas de $1/4$ et $3/2$, il s'agit de $1/2$.

Question 23 Déterminez le premier ancêtre commun de $14/11$ et $23/2$.

Question 24 Utilisez les fonctions `psi` et `inv_psi` pour rédiger en Caml une fonction de signature :

```
pac : int * int -> int * int -> int * int
```

spécifiée comme suit : `pac (m,n) (m',n')` détermine le premier ancêtre commun à m/n et m'/n' . Ainsi, `pac (1,4) (3,2)` rendra le couple $(1, 2)$. Vous pourrez supposer que les fractions m/n et m'/n' sont réduites et distinctes. Objectif : six lignes.

Question 25 ★★ Démontrez la formule suivante, établie par Moshe NEWMAN : si $r(k) = x$, alors $r(k+1) = \frac{1}{2[x] + 1 - x}$, où $[x]$ est la partie entière inférieure de x . Indication : il y a deux cas de figure simples ; pour le troisième, intéressez-vous au premier ancêtre commun de $r(k)$ et $r(k+1)$.

► Notons $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. À la fraction m/n , nous associons le vecteur $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$. Définissons $\Phi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ par $\Phi(G) = \mathbf{G}$ et $\Phi(D) = \mathbf{D}$. La fonction Φ se prolonge naturellement en un morphisme de \mathcal{A}^* (muni de la concaténation) sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ (muni du produit matriciel).

Question 26 Soient m/n un nœud de l'arbre et $w = \psi(m/n)$. Montrez que $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \Phi(\tilde{w}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

► À partir de l'arbre CW, définissons un nouvel arbre binaire infini SB comme suit : l'étiquette du nœud de SB atteint via le chemin w est l'étiquette du nœud de CW atteint via le chemin \tilde{w} .

Question 27 Dessinez les quatre premiers niveaux de l'arbre SB.

Question 28 ★★ Montrez que SB est un arbre binaire de recherche.

4 L'algorithme binaire d'Euclide

► Commençons par un bref rappel de l'algorithme d'EUCLIDE «classique». Soient a et b deux naturels non nuls; les relations $r_0 = a$, $r_1 = b$ et $r_k = q_k r_{k+1} + r_{k+2}$, $0 \leq r_{k+2} < r_{k+1}$ définissent une suite finie $(r_k)_{0 \leq k \leq n}$ vérifiant $r_n = 0$ et $r_{n-1} = a \wedge b$.

Question 29 Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
pgcd : int * int -> int
```

spécifiée comme suit : `pgcd(a,b)` calcule $a \wedge b$ en appliquant l'algorithme d'EUCLIDE classique. Vous pourrez supposer $a > 0$ et $b > 0$. Objectif : trois lignes.

► Décrivons maintenant l'algorithme d'EUCLIDE binaire; il s'applique à deux naturels non nuls a et b ; les règles en sont :

1. si $a = b$, l'algorithme termine et le résultat est a ;
2. si $a > b$, remplacer a par $a - b$ et recommencer;
3. si $a < b$, remplacer b par $b - a$ et recommencer.

Question 30 Décrivez le déroulement de l'algorithme dans le cas $a = 13$ et $b = 8$.

Question 31 Montrez que l'algorithme termine dans tous les cas (sous l'hypothèse $a > 0$ et $b > 0$).

Question 32 Montrez que le résultat rendu par l'algorithme est $a \wedge b$.

Question 33 Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
pgcd_bin : int * int -> int
```

spécifiée comme suit : `pgcd_bin(a,b)` calcule $a \wedge b$ en appliquant l'algorithme d'EUCLIDE binaire. Vous pourrez supposer $a > 0$ et $b > 0$. Objectif : quatre lignes.

► Pour suivre le déroulement de l'algorithme, nous décidons d'imprimer un D (resp. G) à chaque passage par l'étape 2 (resp. 3); nous noterons $\tau(a,b)$ le mot $t_1 t_2 \dots t_j$ ainsi obtenu. Par exemple, $\tau(8,3) = DDGD$.

Question 34 Supposons a et b sont premiers entre eux. Quelle autre interprétation proposez-vous du mot $\tau(a,b)$?

FIN