Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir à rendre après les vacances d'hiver : un corrigé

Problème 1 : palindromite

Question 1 • La formulation récursive suivante nous donne la liste lue de droite à gauche :

```
let rec decompose b = function
 | n when n<b -> [n]
 | n -> (n mod b)::(decompose b (n/b)) ;;
```

Question 2 • Écriture immédiate :

```
let pal_en_base b n =
 let ecr = decompose b n in rev ecr = ecr ;;

let double_pal b n =
 pal_en_base b n && pal_en_base (b+1) n ;;
```

Question 3 • Il suffit de parcourir l'intervalle $[1, n]$:

```
for k = 1 to n do
  if double_pal b k
   then ( print_int k ; print_newline() )
 done ;;
```

Question 4 • Sur une architecture 32 bits, le plus grand nombre représentable est 1073741823. Les nombres palindromes en base 2 et en base 3 sont 1, 6643, 1422773 et 5415589. Sur une architecture 64 bits, on trouve en plus 90396755477 et 381920985378904469 (en utilisant le programme de la question 7).

Question 5 Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, il faut décomposer k en base b, ce qui a un coût $\Omega\big(\ln(k)\big)$. La somme des coûts relatifs aux valeurs de k comprises entre $n/2$ et n est donc un $\Omega\big(n\ln(n/2)\big)$, ce qui est aussi un $\Omega\big(n\ln(n)\big)$.

Question 6 • Fixons $k \geqslant 1$; soit p un nombre dont l'écriture en base b a pour longueur k : $p = a_{k-1}a_{k-2}\dots a_0$. Construisons le nombre q dont l'écriture en base b est $a_{k-1}a_{k-2}\dots a_0a_0\dots a_{k-1}$: il reste à déterminer l'écriture en base $b+1$ de q, et à voir si cette écriture est palindrome. Ceci règle le cas des palindromes de longueur paire. Pour les palindromes de longueur impaire : soit p un nombre dont l'écriture en base b a pour longueur k : $p = a_{k-1}\dots a_0$. Nous construisons cette fois le nombre q dont l'écriture en base b est $a_{k-1}\dots a_1a_0a_1\dots a_{k-1}$, la suite est comme dans le cas précédent.

Pour l'estimation du coût, notons k le plus petit naturel tel que $n \leqslant b^{2k}$. Pour déterminer les solutions comprises entre 1 et b^{2k}, nous devons traiter les nombres compris entre 1 et b^k ; pour chacun de ces nombres, le coût du traitement est un $\mathcal{O}(k)$. Ceci montre que le coût est un $\mathcal{O}(kb^k)$; mais $k = \mathcal{O}\big(\ln(n)\big)$ et $b^k = \mathcal{O}\big(\sqrt{n}\big)$. Donc le coût est un $\mathcal{O}\big(\ln(n)\sqrt{n}\big)$.

Question 7 • Voir `http://bruno.maitresdumonde.com/optinfo/Spe-MP/dmds2005/dm200503/palV2.ml`

Question 8 • Soit $a_{2k-1}\dots a_0$ l'écriture de n en base b. Notons $P = \sum_{0\leqslant j<2k} a_jX^j$; alors :

$$P(-1) = \sum_{0\leqslant j<2k} a_j(-1)^j = \sum_{0\leqslant j<2k} a_{2k-1-j}(-1)^{2k-1-j} = -\sum_{0\leqslant j<2k} a_j(-1)^j$$

si bien que $P(-1) = 0$. Donc n est divisible par $b+1$.

Question 9 • L'écriture de n en base $b+1$ se termine par un 0.

Question 10 • Si l'écriture en base b de n est de longueur paire, alors n n'est pas palindrome en base $b+1$.

Question 11 • Dans la méthode proposée à la question 7, il suffit de n'engendrer que les nombres dont l'écriture en base b est palindrome et de longueur impaire.

Références bibliographiques

► Voir la séquence A060792 sur le site `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`.

Problème 2 : un système de numération exotique

Question 1 • Si $N_i = 0$, alors $N_{i+1} = 0$. Sinon, nous avons $N_{i+1} = \left\lfloor \frac{qN_i}{p} \right\rfloor$; mais $q < p$, donc $\frac{qN_i}{p} < N_i$ et à plus forte raison $N_{i+1} < N_i$. Dans les deux cas, $N_{i+1} \leqslant N_i$.

Question 2 • Il ne peut exister qu'un nombre fini d'indices i tels que $N_{i+1} < N_i$. Notons k le plus grand d'entre eux. Alors $N_k > 0$ et $N_{k+1} = N_{k+2}$; le résultat de la question précédente montre que ces deux derniers nombres sont égaux à 0, puis que $N_i = 0$ pour tout $i > k$.

Question 3 • Il suffit de remarquer que $a_k = qN_k$, puisque $N_{k+1} = 0$.

Question 4 • $N_0 = 5$, $p = 3$ et $q = 2$. Alors $qN_0 = 10 = 3\times3+1$, donc $a_0 = 1$ et $N_1 = 3$; puis $qN_1 = 6 = 2\times3$, donc $a_1 = 0$ et $N_1 = 2$; puis $qN_2 = 4 = 1 \times 3 + 1$, donc $a_2 = 1$ et $N_2 = 1$; enfin, $qN_3 = 2 = 0 \times 3 + 2$, donc $a_3 = 2$ et $N_4 = 0$. L'algorithme se termine, et la représentation de 5 en base 3/2 est 2101.

Question 5 • Dans le cas particulier $q = 1$, nous retrouvons la numération habituelle en base $p \geqslant 2$.

Question 6 • $N_0 = 17$, $p = 5$ et $q = 3$. Alors $qN_0 = 51 = 10 \times 5 + 1$, donc $a_0 = 1$ et $N_1 = 10$; puis $qN_1 = 30 = 6 \times 5$, donc $a_1 = 0$ et $N_2 = 6$; puis $qN_2 = 18 = 3 \times 5 + 3$, donc $a_2 = 3$ et $N_3 = 3$; puis $qN_3 = 9 = 1 \times 5 + 4$, donc $a_4 = 4$ et $N_4 = 1$; enfin, $qN_4 = 3 = 0 \times 5 + 3$, donc $a_5 = 3$ et $N_5 = 0$. L'algorithme se termine, et la représentation de 17 en base 5/3 est 34301.

Question 7 • L'utilisation du nom `my_n` n'est pas indispensable. La récursivité terminale employée ici a deux avantages : meilleure performance ; et la liste est rendue dans l'ordre attendu, ce qui économise un appel à `rev`.

```
let representation p q my_n =
 let rec aux accu = function
  | 0 -> accu
  | n -> let d = q*n in let (n',a) = (d/p,d mod p) in aux (a::accu) n'
 in aux [] my_n ;;
```

Question 8 • Pour $i \in [\![0, k]\!]$, nous avons $qN_i = pN_{i+1} + a_i$. En multipliant les deux membres par p^i/q^{i+1}, nous obtenons la relation $\frac{p^iN_i}{q^i} = \frac{p^{i+1}N_{i+1}}{q^{i+1}} + \frac{p^ia_i}{q^{i+1}}$, laquelle se prête au télescopage ; comme $N_0 = n$ et $N_{k+1} = 0$, il vient $n = \sum_{0\leqslant i\leqslant k} \frac{p^ia_i}{q^{i+1}}$. Donc la suite de terme général $u_i = p^i/q^{i+1}$ répond à la question.

Question 9 • Notez le `rev` rendu nécessaire par l'ordre de lecture de la liste.

```
let conversion p q l =
 let rec aux = function
  | [] -> 0
  | t::r -> (p*(conversion p q r)+t)/q
 in aux (rev l) ;;
```

Question 10 • Soit w appartenant à $L_{p/q}$, de longueur $k \geqslant 2$. Il suffit de montrer que le préfixe w' de w, de longueur $k-1$, est encore dans $L_{p/q}$. Notons n l'entier représenté par w en base p/q, et $w = w_1 \ldots w_k$; d'après la première étape de l'algorithme, nous avons $N_0 = n$ et $qN_0 = pN_1 + w_k$, donc $w_1 \ldots w_{k-1}$ appartient à $L_{p/q}$, car il représente $\frac{qN_0 - w_k}{p}$ en base p/q.

Question 11 • Soit w appartenant à $L_{p/q}$, de longueur $k \geqslant 1$. w représente un naturel non nul n. Notons $n' = \lceil pn/q \rceil$; nous aurons $pn/q \leqslant n' < pn/q + 1$, soit $0 \leqslant n'q - pn < q$. Notons $w_{k+1} = n'q - pn$: alors $w_{k+1} \in [\![0, q-1]\!]$, donc $w_{k+1} \in \Sigma$; w est préfixe du mot $w_1 \ldots w_k w_{k+1}$, lequel appartient à $L_{p/q}$, car il représente le naturel n' en base p/q. Notons qu'il peut exister plusieurs solutions : par exemple, en base 3/2, le mot 21011 représente 8 ; il est préfixe de 210110, qui représente 12, et de 210112, qui représente 13.

Question 12 • Solution de facilité : $a_k \neq 0$, donc aucun mot de $L_{3/2}$ ne commence par un 0 ; ainsi, le langage rationnel infini `0(0+1+2)*` est disjoint de $L_{3/2}$. Solution plus intéressante : il n'existe aucun mot de $L_{3/2}$ commençant par 22 : en effet, si $a_k = a_{k-1} = 2$, alors $2N_k = a_k$ implique $N_k = 1$; puis $2N_{k-1} = 3N_k + a_{k-1}$ implique $2N_{k-1} = 5$, ce qui est contradictoire. Donc le langage rationnel infini `22(0+1+2)*` est disjoint de $L_{3/2}$.

Références bibliographiques

► Shigeki Akiyama, Christiane Frougny et Jacques Sakarovitch : *On the Representation of Numbers in a Rational Base.*

FIN