Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir à rendre après les vacances d'hiver

▶ Rédigez au moins l'un des deux problèmes. Les prétendants aux ENS option informatique devraient rédiger les deux problèmes.

Problème 1 : palindromite

▶ Rappel : soient $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. L'écriture de n en base b est le mot $a_k a_{k-1} \dots a_0$ sur l'alphabet $\{0,1,\dots,b-1\}$ défini par l'égalité $n = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} a_j b^j$. Le premier chiffre de cette écriture ne peut être 0.

Question 1 • Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
decompose : int -> int -> int list
```

spécifiée comme suit : `decompose b n` donne l'écriture de n en base b ; deux ordres sont possibles, vous préciserez votre choix. Objectif : trois lignes.

▶ Nous dirons que le naturel n est palindrome en base b si son écriture en base b est palindrome ; par exemple, 74647 est palindrome en base 10 (c'est clair), en base 6 et en base 3 (vérifiez-le).

Question 2 • Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
double_pal : int -> int -> bool
```

spécifiée comme suit : `double_pal b n` indique si n est palindrome en base b et en base $b+1$. Objectif : quatre lignes, dont deux pour une fonction auxiliaire.

Question 3 • Avec les fonctions précédentes, rédigez un programme en Caml qui teste les naturels compris entre 1 et n, et affiche ceux qui sont palindromes dans les bases b et $b+1$.

Question 4 • Ne répondez à cette question que si vous avez un ordinateur ! Quel est le plus grand naturel représentable avec le type `int` de Caml, et qui est palindrome en base 2 et en base 3 ?

▶ Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Nous dirons que u_n est un $\Omega(v_n)$ s'il existe une constante $k > 0$ telle que $u_n \geqslant k v_n$ pour tout n.

Question 5 Montrez que le coût de la méthode proposée à la question 3 est un $\Omega\big(n \ln(n)\big)$.

Question 6 • Proposez une méthode dont le coût est un $\mathcal{O}\big(\ln(n)\sqrt{n}\big)$. Indication : un palindrome de longueur $2k$ (resp. $2k+1$) est parfaitement défini par son préfixe de longueur k (resp. $k+1$).

Question 7 • Reprenez le programme écrit à la question 3, en incorporant cette amélioration !

▶ Soit n un naturel dont l'écriture en base b est palindrome et de longueur paire.

Question 8 • Exhibez une diviseur de n.

Question 9 • Que pouvez-vous dire de l'écriture de n en base $b+1$?

Question 10 • Concluez !

Question 11 • Avec cette remarque, améliorez encore votre programme !

Problème 2 : un système de numération exotique

▶ Dans tout l'exercice, p et q sont deux naturels premiers entre eux, vérifiant $p > q$. Σ désigne l'ensemble $[\![0, p-1]\!]$.

▶ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. notons $N_0 = n$; puis, pour i commençant à 0, définissons N_{i+1} et a_i par les deux conditions $qN_i = pN_{i+1} + a_i$ et $0 \leqslant a_i < p$. En clair : N_{i+1} est le quotient et a_i le reste dans la division euclidienne de qN_i par p.

Question 1 • Montrez que la suite $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Question 2 • Montrez qu'il existe un naturel k tel que $N_k > 0$ et $N_i = 0$ pour tout $i > k$.

Question 3 • Montrez que $a_k > 0$.

▶ La représentation de n en base p/q est le mot $a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$ sur l'alphabet Σ.

Question 4 • Vérifiez que la représentation de 5 en base 3/2 est 2101 ; vous déroulerez les étapes de l'algorithme exposé plus haut.

Question 5 • Qu'obtient-on dans le cas particulier $q = 1$?

Question 6 • Quelle est la décomposition de 17 en base 5/3 ?

Question 7 • Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
representation : int -> int -> int -> int list
```

spécifiée comme suit : `representation p q n` donne la représentation de n en base p/q.

Question 8 • Montrez qu'il existe une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (qui dépend de p et q) telle que, pour tout $n \geqslant 1$, la suite $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ qui représente n en base p/q vérifie $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_i u_i = n$.

Question 9 • Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
conversion : int -> int -> int list -> int
```

spécifiée comme suit : `conversion p q l` donne le naturel n dont ℓ est la représentation en base p/q. Attention : si vous effectuez des divisions, elle doivent ≪tomber juste≫.

▶ Nous nous intéressons au langage $L_{p/q}$, ensemble des représentations des naturels non nuls en base p/q.

Question 10 • Montrez que si w appartient à $L_{p/q}$, alors tout préfixe (non vide) de w appartient à $L_{p/q}$.

Question 11 • Montrez que tout mot w appartenant à $L_{p/q}$ est préfixe d'au moins un autre mot de $L_{p/q}$.

Question 12 • Exhibez un langage rationnel infini disjoint de $L_{3/2}$.

FIN