# Option Informatique en Spé MP et MP*
# Devoir à rendre après les vacances de la Toussaint
# Automate des sous-mots

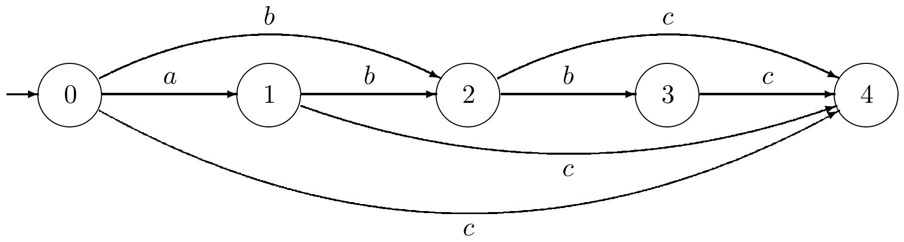
▶ La notion de sous-mot est connue ; au besoin, relisez le texte introductif. Si vous l'avez perdu, rendez-vous à l'URL `http://bruno.maitresdumonde.com/optinfo/Spe-MP/dmds2005/dm200502/index.html`

▶ Dans ce problème, $\Sigma$ est un alphabet fini non vide et $u$ un mot de longueur $n$. L'ensemble $L_u$ des sous-mots de $u$ est fini, donc rationnel. Nous nous proposons de décrire un algorithme de construction d'un automate fini sans transitions instantanées, reconnaissant $L_u$.

***Question 1*** Donnez un encadrement du nombre de sous-mots de $u$. Les bornes que vous proposerez devront être optimales, c'est-à-dire être atteintes par au moins un mot de longueur $n$, et ce pour chaque valeur de $n$.

***Question 2*** Décrivez rapidement un automate fini à transitions instantanées, à $n+1$ états, reconnaissant $L_u$.

***Question 3*** Montrez que le langage reconnu par l'automate ci-dessous est l'ensemble des sous-mots de *abbc*.




▶ Nous supposerons sans perte de généralité que toutes les lettres de $\Sigma$ apparaissent au moins une fois dans $u$ ; nous noterons $z = |\Sigma|$, et $x_1, \ldots, x_n$ les éléments de $\Sigma$. L'algorithme suivant construit un automate fini $\mathcal{A}_u$ déterministe (mais pas nécessairement complet) dont nous montrerons qu'il reconnaît $L_u$. Cet algorithme construit une liste d'états $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$ et une liste de transitions ; chaque état est final, et l'état initial est $q_0$. L'algorithme utilise un tableau d'entiers $v$ de taille $z$, indexé par les éléments de $\Sigma$ ; les cases de $v$ sont initialisées à la valeur 0. Déroulement :

1. ajouter l'état $q_0$ ;
2. pour $j$ allant de 1 à $n$ :
   (a) ajouter l'état $q_j$ ;
   (b) pour $i$ allant de $v[u_j]$ à $j-1$, ajouter une transition menant de $q_i$ à $q_j$ et étiquetée $u_j$ ;
   (c) $v[u_j] \leftarrow j$ ;

***Question 4*** Dans cette question uniquement, $u = acbbc$. Appliquez l'algorithme au mot $u$ ; vous décrirez les étapes successives.

***Question 5*** Montrez que l'automate $\mathcal{A}_u$ construit par l'algorithme est déterministe.

***Question 6*** Montrez que l'assertion suivante reste vraie au cours du déroulement de l'algorithme : pour tout $x \in \Sigma$, $v[x]$ est le plus petit numéro d'un état dont n'émane aucune transition étiquetée $x$.

***Question 7*** Soient $x \in \Sigma$ et $j \in [\![0, n-1]\!]$. Montrez que $q_i \cdot x = q_j$ si et seulement si $j$ est le plus petit $k > i$ tel que $u_k = x$.

***Question 8*** Montrez que $\mathcal{A}_u$ reconnaît chaque sous-mot de $u$.

***Question 9*** Montrez que tout mot reconnu par $\mathcal{A}_u$ est un sous-mot de $u$.

▶ Nous avons montré que $\mathcal{A}_u$ reconnaît précisément $L_u$. Nous allons donner un majorant du nombre d'états de $\mathcal{A}_u$.

***Question 10*** Montrez que le nombre de transitions qui partent de $q_i$ est au plus égal à $\min(z, n-i)$.

***Question 11*** Montrez que le nombre de transitions de $\mathcal{A}_u$ est au plus égal à $\tau(n,z) = \dfrac{z(2n+1-z)}{2}$.

***Question 12*** Quels sont les mots pour lesquels ce majorant est atteint ?

**FIN**