Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir à rendre après les vacances de la Toussaint
Automate des sous-mots

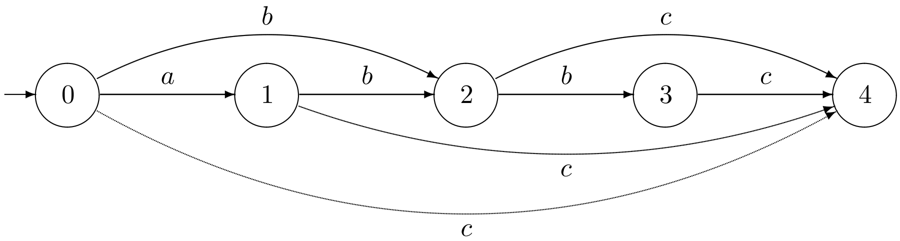
▶ La notion de sous-mot est connue ; au besoin, relisez le texte introductif. Si vous l'avez perdu, rendez-vous à l'URL `http://bruno.maitresdumonde.com/optinfo/Spe-MP/dmds2005/dm200502/index.html`

▶ Dans ce problème, Σ est un alphabet fini non vide et u un mot de longueur n. L'ensemble L_u des sous-mots de u est fini, donc rationnel. Nous nous proposons de décrire un algorithme de construction d'un automate fini sans transitions instantanées, reconnaissant L_u.

Question 1 Donnez un encadrement du nombre de sous-mots de u. Les bornes que vous proposerez devront être optimales, c'est-à-dire être atteintes par au moins un mot de longueur n, et ce pour chaque valeur de n.

Question 2 Décrivez rapidement un automate fini à transitions instantanées, à $n+1$ états, reconnaissant L_u.

Question 3 Montrez que le langage reconnu par l'automate ci-dessous est l'ensemble des sous-mots de $abbc$.



▶ Nous supposerons sans perte de généralité que toutes les lettres de Σ apparaissent au moins une fois dans u ; nous noterons $z = |\Sigma|$, et $x_1, \ldots, x_n$ les éléments de Σ. L'algorithme suivant construit un automate fini $\mathcal{A}_u$ déterministe (mais pas nécessairement complet) dont nous montrerons qu'il reconnaît L_u. Cet algorithme construit une liste d'états $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$ et une liste de transitions ; chaque état est final, et l'état initial est q_0. L'algorithme utilise un tableau d'entiers v de taille z, indexé par les éléments de Σ ; les cases de v sont initialisées à la valeur 0. Déroulement :

1. ajouter l'état q_0 ;
2. pour j allant de 1 à n :
   (a) ajouter l'état q_j ;
   (b) pour i allant de $v[u_j]$ à $j-1$, ajouter une transition menant de q_i à q_j et étiquetée u_j ;
   (c) $v[u_j] \leftarrow j$;

Question 4 Dans cette question uniquement, $u = acbbc$. Appliquez l'algorithme au mot u ; vous décrirez les étapes successives.

Question 5 Montrez que l'automate $\mathcal{A}_u$ construit par l'algorithme est déterministe.

Question 6 Montrez que l'assertion suivante reste vraie au cours du déroulement de l'algorithme : pour tout $x \in \Sigma$, $v[x]$ est le plus petit numéro d'un état dont n'émane aucune transition étiquetée x.

Question 7 Soient $x \in \Sigma$ et $j \in [\![0, n-1]\!]$. Montrez que $q_i \cdot x = q_j$ si et seulement si j est le plus petit $k > i$ tel que $u_k = x$.

Question 8 Montrez que $\mathcal{A}_u$ reconnaît chaque sous-mot de u.

Question 9 Montrez que tout mot reconnu par $\mathcal{A}_u$ est un sous-mot de u.

▶ Nous avons montré que $\mathcal{A}_u$ reconnaît précisément L_u. Nous allons donner un majorant du nombre d'états de $\mathcal{A}_u$.

Question 10 Montrez que le nombre de transitions qui partent de q_i est au plus égal à $\min(z, n-i)$.

Question 11 Montrez que le nombre de transitions de $\mathcal{A}_u$ est au plus égal à $\tau(n,z) = \dfrac{z(2n+1-z)}{2}$.

Question 12 Quels sont les mots pour lesquels ce majorant est atteint ?

FIN