Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir à rendre après les vacances de la Toussaint
Étude d'un mot infini

▶ Dans tout le problème, Σ désigne l'alphabet $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

▶ Un *mot infini* est une fonction u de $\mathbb{N}^*$ dans Σ. Nous noterons $u = u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$; pour $1 \leqslant i \leqslant j$, nous noterons $u[i..j]$ le mot $u_i u_{i+1} \ldots u_{j-1} u_j$. Un mot v (fini, non vide) de longueur ℓ est *facteur* de u s'il existe $i > 0$ tel que $v = u[i..i + \ell - 1]$; chaque position i vérifiant cette propriété nous donne une *occurrence* du mot v dans u. Un facteur de u peut posséder une ou plusieurs occurrences, voire une infinité.

▶ Nous nous intéressons au mot infini $u = \mathbf{0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,0} \ldots \mathbf{0\,1}^k\,\mathbf{0\,1}^{k+1}\,\mathbf{0} \ldots$.

Question 1 Quelle est la position P_k dans u de la k-ième occurrence de $\mathbf{0}$?

▶ Notons L l'ensemble des facteurs de u qui possèdent une seule occurrence. Un élément v de L sera dit *minimal* si aucun de ses facteurs n'appartient à L.

Question 2 Montrez que les éléments minimaux de L sont les mots de la forme $\mathbf{0\,1}^k\,\mathbf{0}$, avec $k \geqslant 1$.

▶ Un facteur v de u est *récurrent* s'il possède une infinité d'occurrences. Par exemple, $\mathbf{0\,1}$ est récurrent.

Question 3 Montrez que les facteurs de u n'appartenant pas à L sont récurrents.

Question 4 Décrivez précisément l'ensemble des facteurs récurrents de u.

▶ Soit v un facteur de u ; l'un au moins des deux mots $v\,\mathbf{0}$ et $v\,\mathbf{1}$ est facteur de u. Nous dirons que v est *spécial à droite* si ces deux mots sont facteurs de u. Ainsi, $\mathbf{0\,1}$ est spécial à droite puisque $\mathbf{0\,1\,0}$ et $\mathbf{0\,1\,1}$ sont des facteurs de u. Nous dirons «spécial» pour «spécial à droite».

Question 5 Énumérez les facteurs spéciaux de u de longueur 2, puis ceux de longueur 3.

Question 6 Déterminez le nombre de facteurs spéciaux de u, de longueur n.

▶ La *complexité* du mot infini u est la fonction C_u qui, à $n \geqslant 1$, associe le nombre de facteurs de longueur n de u. Ainsi, $C_u(1) = 2$ (parce que les deux lettres $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ apparaissent dans u) ; et $C_u(2) = 3$, puisque les facteurs $\mathbf{0\,1}$, $\mathbf{1\,1}$ et $\mathbf{1\,1}$ apparaissent dans u, tandis que $\mathbf{0\,0}$ n'apparaît pas.

Question 7 Justifiez brièvement l'affirmation suivante : $C_u(n+1) - C_u(n)$ est égal au nombre de facteurs de u de longueur n, spéciaux à droite.

Question 8 Explicitez $C_u(n)$, pour $n \geqslant 1$.

▶ Soit v un facteur récurrent de u. Nous dirons que v est *uniformément récurrent* s'il existe $N \geqslant |v|$ tel que tout facteur de u de longueur au moins égale à N contient au moins une occurrence de v ; nous noterons $\rho(v)$ le plus petit N vérifiant cette propriété.

▶ Par exemple, le facteur $\mathbf{1}$ est uniformément récurrent, avec $\rho(\mathbf{1}) = 2$. En revanche, $\mathbf{1\,0\,1}$ est récurrent, mais pas uniformément : pour chaque $N \geqslant 3$, le mot 1^N est facteur de u mais ne contient aucune occurrence de $\mathbf{1\,0\,1}$.

Question 9 Caractérisez les facteurs uniformément récurrents de u, et explicitez $\rho(v)$ pour chaque facteur v uniformément récurrent de u.

FIN