Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir surveillé du jeudi 17 février 2005
Langages rationnels et automates finis

▶ Dans tout l'exercice, $\Sigma = \{a,b\}$. Nous noterons L le langage des mots contenant le facteur ab.

Question 1 Soit $u \in L$. Montrez qu'il existe $v \notin L$ et $w \in \Sigma^*$ tels que $u = vabw$.

▶ Considérons alors la fonction qui, au mot $u \in L$, associe le mot $vbaw$, où v et w sont les mots dont l'existence a été établie à la question 1.

Question 2 φ est-il un morphisme de L sur Σ^* ?

Question 3 φ est-il injectif?

Question 4 Décrivez simplement $\varphi(L)$.

Question 5 Soient P une partie rationnelle de L et $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini déterministe reconnaissant P. Construisez un automate fini $\mathcal{B}$ reconnaissant $\varphi(P)$. Remarques :

- l'emploi de transitions instantanées est interdit et inutile ;
- vous justifierez rigoureusement que chaque mot reconnu par votre automate appartient à $\varphi(P)$;
- vous justifierez rigoureusement que chaque mot de $\varphi(P)$ est reconnu par votre automate.

▶ Soit $u \in L$. Le *degré* de u est le naturel d défini comme suit : on peut calculer $\varphi^d(u)$, mais pas $\varphi^{d+1}(u)$. Notez que L est l'ensemble des mots de degré non nul.

Question 6 Quel est le degré du mot $baababb$?

Question 7 Soit $n \geqslant 2$. Calculez la valeur maximale du degré de u, lorsque u décrit $L \cap \Sigma^n$. Vous préciserez le(s) mot(s) de degré maximal.

▶ Supposons défini le type suivant :

```
type lettre = A | B ;;
```

Un mot sera représenté par une `lettre list` ; par exemple, le mot $ababb$ sera représenté par la liste `[A;B;A;B;B]`.

Question 8 Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
phi : lettre list -> lettre list
```

spécifiée comme suit : `phi u` calcule $\varphi(u)$ si $u \in L$ et lève une exception dans le cas contraire. Le coût doit être un $\mathcal{O}(|u|)$. Objectif : quatre lignes.

Question 9 ⋆⋆ Rédigez en Caml une fonction de signature :

```
degré : lettre list -> int
```

spécifiée comme suit : `degré u` calcule le degré de u. Le coût doit être un $\mathcal{O}(|u|)$. Objectif : six lignes.

▶ Définissons la fonction $\psi : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ comme suit : $\psi(u) = \varphi^d(u)$, où d est le degré de u.

Question 10 Exhibez une partie M non rationnelle de L, telle que $\psi(M)$ soit rationnelle.

FIN