Option Informatique en Spé MP et MP*
Devoir à rendre après les vacances d'hiver : le corrigé

Isomorphismes de graphes

Question 1 • Toute bijection de $[\![1, n]\!]$ est un automorphisme de K_n ; il y en a donc $n!$.

Question 2 • Il n'existe qu'un automorphisme de P_1 ; pour $n \geqslant 2$, P_n possède deux automorphismes : l'identité et $j \mapsto n+1-j$.

Question 3 • Il existe $2n$ automorphismes du cycle C_n : les n rotations et leurs composées avec la symétrie $j \mapsto n+1-j$.

Question 4 • S'ils sont isomorphes, G et $\overline{G}$ ont le même nombre k d'arêtes ; donc $2k = \binom{n}{2}$, soit $n(n-1) = 4k$; comme n et $n-1$ ont des parités opposées, l'un d'eux doit être multiple de 4, ce qui impose $n = 4p$ ou $n = 4p+1$.

Question 5 • Un graphe G à 4 sommets isomorphe à son complémentaire doit comporter 3 arêtes ; si celles-ci forment un cycle, $\overline{G}$ est une étoile ; sinon, G est un chemin $abcd$; son complémentaire est le chemin $bdac$.

Question 6 • Le complémentaire de C_5 est une étoile à cinq branches qui, dépliée, est clairement isomorphe à C_5.

Graphes connexes

Question 7 • Sens direct : par contraposition. Le graphe étant connexe, nous avons $|A| \geqslant |S| - 1$; l'existence d'un cycle implique $|A| \geqslant |S|$. Supprimons une arête du cycle : le graphe $G' = (S, A')$ obtenu reste connexe, donc c'est arbre. Alors $|A'| = |S| - 1$ puis $|A| = |S|$.

Réciproque : il existe au moins un cycle ; choisissons l'un d'eux et supprimons une arête. Le graphe $G' = (S, A')$ obtenu reste connexe, et il vérifie $|S| = |A'| + 1$: c'est donc un arbre, et par suite il ne possède aucun cycle. Donc G possède un seul cycle.

Question 8 • Soit $t \in S$ tel que $d(y, t) = e(y)$. Considérons un chemin γ menant de x à t : sa longueur ℓ est au plus $e(x)$. En ajoutant l'arête xy devant γ, nous obtenons un chemin de longueur $\ell + 1$ menant de x à t. Donc $e(y) \leqslant \ell + 1$; par transitivité, $e(y) \leqslant e(x) + 1$. Par raison de symétrie, $e(x) \leqslant e(y) + 1$: ce qui nous donne la conclusion attendue.

Un graphe curieux

► Nous noterons x_0 le sommet de degré k et $x_1, \ldots, x_k$ les feuilles.

Question 9 • En tant qu'arbre, G possède au moins deux feuilles, donc il y a des sommets de degré 1 ; et il existe au moins un sommet de degré k. Il reste $n-k-1$ autres sommets. Comme G est un arbre, il possède $n-1$ arêtes, donc la somme des degrés des sommets est égale à $2n-2$. Par suite, la somme des degrés des $n-k-1$ autres sommets est $2n-2-2k = 2(n-k-1)$; comme ils sont tous de degré au moins 2, ils sont tous de degré exactement 2. Finalement, les valeurs possibles du degré d'un sommet de G sont 1, k, ainsi que 2 si $n > k+1$.

Question 10 • Chaque feuille est reliée à x_0 par un chemin le long duquel chaque sommet intermédiaire (s'il y en a) est de degré 2 ; donc G est la réunion de ces k chemins, qui ont x_0 pour extrémité commune.

Question 11 • Notons $q = \left\lfloor \dfrac{n-k-1}{k} \right\rfloor$ le quotient et $r = (n-k-1) - kq$ le reste dans la division euclidienne de $n-k-1$ par k. Si $r = 0$, alors la plus petite valeur possible du diamètre de G est $2q$. En effet, cette valeur est atteinte par un arbre dans lequel les k chemins qui partent de x_0 ont pour longueur q. Si $k = 2$, alors G est un graphe linéaire : son diamètre est $2q$ quelles que soient les distances de ces deux feuilles à x_0. Supposons maintenant $k \geqslant 3$: s'il existe au moins une feuille x_i telle que $d(x_i, x_0) > q$, il doit aussi exister une feuille x_j telle que $d(x_j, x_0) < q$; en décrochant la feuille x_i du sommet voisin et en l'accrochant à la feuille x_j, on n'augment pas le diamètre ; donc le diamètre est certainement minimal lorsque toutes les feuilles sont à la même distance de x_0.

• Si $r > 0$, alors la plus petite valeur possible du diamètre de G est $2q+1$. En effet, cette valeur est atteinte par un arbre dans lequel r des k chemins qui partent de x_0 ont pour longueur $q+1$, et les $k-r$ autres ont pour longueur q. Comme précédemment, le cas $k = 2$ est banal. Supposons $k \geqslant 3$: s'il existe au moins une feuille x_i telle que $d(x_i, x_0) > q+1$, alors ou bien il existe une feuille x_j telle que $d(x_j, x_0) < q$; ou bien toutes les feuilles sont à une distance de x_0 égale à q ou à $q+1$, et il en existe au moins une, x_j, à la distance q. Dans les deux cas, en décrochant la feuille x_i du sommet voisin et en l'accrochant à la feuille x_j, on n'augmente pas le diamètre de G. Donc le diamètre est certainement minimal lorsque les feuilles ont la disposition proposée.

• La plus grande valeur possible du diamètre de G est $n-k-1$. En effet, cette valeur est atteinte avec un arbre dans lequel x_0 est de degré k ; les feuilles sont $x_1, \ldots, x_k$, toutes voisines de x_0 à l'exception de x_k, reliée à x_0 par un chemin de longueur $n-k$. D'autre part, les distances de $x_1, \ldots, x_k$ à x_0 sont au moins égales à 1 ; si trois au moins des feuilles (disons x_1, x_2 et x_3) sont à une distance de x_0 au moins égale à 2, le diamètre de G n'est pas maximal puisqu'en décrochant de son voisin celle de ces trois feuilles qui est la plus proche de x_0 et en l'accrochant à l'une des deux autres, on augmente le diamètre. Donc le maximum est atteint quand au plus deux des feuilles sont distantes de x_0 de plus de 1.

Arbres

Question 12 • Notons k l'excentricité de s et t un sommet tel que $d(s,t)=k$. Distinguons deux cas de figure. Si le chemin menant de s à t ne passe ni par x, ni par y, alors $d(x,t)=k+1$, donc $e(x) \geqslant k+1$ et de même $e(y) \geqslant k+1$, d'où $e(x)+e(y)=2k+2>2k$. Sinon, supposons pour fixer les idées que le chemin menant de s à t passe par x ; alors $d(x,t)=k-1$ et $d(y,t)=k+1$; donc $e(x)+e(y)=2k$.

Question 13 Soit t un somet tel que $d(x,t)=e(x)$. Notons y le voisin de x sur le chemin qui mène de x à t. Pour tout sommet s, nous avons $d(x,s) \leqslant d(x,y)+d(y,s) \leqslant 1+e(y)$; donc $e(y) \geqslant e(x)-1$. Nous allons montrer qu'on a l'égalité. Pour ce faire, il suffit d'établir $e(y)<e(x)$, soit encore $d(y,s)<e(x)$ pour tout un sommet s. Si $s=x$, le résultat est clair : $e(x)>r$, et $r \geqslant 1$. Sinon : si le chemin menant de y à s ne passe pas par x, alors $d(y,s)=d(x,s)-1 \leqslant e(x)-1$; et si ce chemin passe par x, alors $d(s,t) \leqslant 2r$ et $d(y,s) \leqslant 2r-d(y,t)$; mais $d(y,t)=e(x)-1$ et $r \leqslant e(x)-1$, d'où $d(y,s) \leqslant e(x)-1$. Ceci suffit pour conclure !

Question 14 Nous pouvons déjà affirmer que le diamètre de G est au moins égal à $d(y,z)$, et que $d(y,z) \geqslant d(y,x)$. Remarquons que le chemin menant de y à z passe par x : sinon, $d(x,z)=d(x,y)+d(y,z)>d(x,y)$ ce qui contredit la définition de y. Nous allons envisager deux cas de figure, selon la parité de $d(y,z)$.

• Cas 1 : $d(y,z)=2p$. Notons m le sommet situé, sur le chemin menant de y à z, à égale distance des deux extrémités. Soit t un sommet quelconque de G. Si le chemin menant de m à t passe par x, alors par x, alors $d(x,m)+d(m,t)=d(x,t) \leqslant d(x,m)+d(m,y)$, donc $d(m,t) \leqslant d(m,y)=p$. Si ce chemin ne passe pas par x, alors $d(y,m)+d(m,z)=d(y,z) \geqslant d(y,t)=d(y,m)+d(m,t)$, donc $d(m,t) \leqslant d(m,z)=p$. Finalement, l'excentricité de m est p, donc le diamètre de G est au plus $2p$; comme $d(y,z)=2p$, nous concluons : le diamètre de G est égal à $2p$, donc à $d(y,z)$.

• Cas 2 : $d(y,z)=2p+1$. Notons m le sommet situé sur le chemin menant de y à z et vérifiant $d(y,m)=p$; nous aurons $d(m,z)=p+1$. Soit t un sommet quelconque de G. Si le chemin menant de m à t passe par x, alors par x, alors $d(x,m)+d(m,t)=d(x,t) \leqslant d(x,y)=d(x,m)+d(m,y)$, donc $d(m,t) \leqslant d(m,y)=p$. Si ce chemin ne passe pas par x, alors $d(y,m)+d(m,z)=d(y,z) \geqslant d(y,t)=d(y,m)+d(m,t)$, donc $d(m,t) \leqslant d(m,z)=p+1$. En fait l'inégalité est stricte : si l'on avait $d(m,t)=p+1$, alors on aurait $d(x,t)=d(x,m)+d(m,t)=d(x,m)+d(m,y)+1>d(x,y)$, contredisant la définition de y. Finalement, l'excentricité de m est p et nous concluons comme dans le premier cas.

Et pour finir ...

Question 15 • Numérotons $x_0, \ldots, x_k$ les $k+1$ sommets considérés, dans un parcours de P_n allant de l'une de ses feuilles à l'autre. Pour $i \in [\![1,k]\!]$, notons r_i le reste modulo k de $d(x_i,x_0)$. Si l'un des r_i est nul, alors $d(x_0,x_i$ est multiple de k. Si les r_i sont tous non nuls, alors, comme ils appartiennent à $[\![1,k-1]\!]$, deux d'entre eux sont égaux : il existe des indices i et j tels que $1 \leqslant i<j \leqslant k$ et $r_i=r_j$. Compte tenu de la numérotation utilisée, le sommet x_i est entre x_0 et x_j, donc $d(x_i,x_j)=d(x_0,x_j)-d(x_0,x_i)$, qui est multiple de k.

• Remarquons que la valeur $k+1$ est optimale : si l'on choisit k sommets de P_n consécutifs, alors les distances mutuelles sont toutes comprises entre 1 et $k-1$.

FIN