

Option Informatique en Spé MP et MP*

Devoir à rendre après les vacances d'hiver

Les notions de base sur les graphes sont supposées connues. Au besoin, vous trouverez un rappel de ces notions en allant visiter l'URL suivant :

<http://bruno.maitresdumonde.com/optinfo/Graphes/index.html>

L'arête $\{x,y\}$ sera notée xy . L'excentricité du sommet x est notée $e(x)$.

Isomorphismes de graphes

► Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes. Un *isomorphisme* de G_1 sur G_2 est une bijection φ de S_1 sur S_2 qui vérifie la condition suivante : $uv \in A_1 \iff \varphi(u)\varphi(v) \in A_2$.

Question 1 Combien existe-t-il d'automorphismes du graphe complet K_n ?

Question 2 Combien existe-t-il d'automorphismes du graphe linéaire P_n ?

Question 3 Combien existe-t-il d'automorphismes du cycle C_n ?

Question 4 Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrez qu'un graphe G possédant $4p + 2$ ou $4p + 3$ sommets ne peut être isomorphe à son complémentaire \overline{G} .

Question 5 Montrez que, parmi les graphes à 4 sommets, P_4 est le seul qui soit isomorphe à son complémentaire.

Question 6 ★ Exhibez un graphe à cinq sommets, isomorphe à son complémentaire.

Graphes connexes

► Dans les questions suivantes, $G = (S, A)$ est un graphe connexe ; nous avons donc $|A| \geq |S| - 1$.

Question 7 Montrez que G possède exactement un cycle ssi $|A| = |S|$.

Question 8 Soient x et y deux sommets voisins. Montrez que $|e(x) - e(y)| \leq 1$.

Un graphe curieux

► Soit G un arbre possédant n sommets, dont $k < n$ feuilles. Nous supposons que le degré maximal d'un sommet de G est précisément k .

Question 9 Quelles sont les valeurs possibles du degré d'un sommet de G ?

Question 10 Montrez que G est la réunion de k chemins ayant une extrémité commune.

Question 11 ★★ Pour n et k fixés, déterminez la plus petite et la plus grande valeur possible du diamètre de G .

Arbres

► Dans la suite, nous supposons que G est un arbre.

Question 12 Soient x et y deux voisins du sommet s . Montrez que $2e(s) \leq e(x) + e(y)$.

Question 13 Supposons qu'il existe un sommet x dont l'excentricité est strictement supérieure au rayon r de G . Montrez que x possède un voisin d'excentricité $e(x) - 1$.

Question 14 ★★ Soit x un sommet de G ; soit y un sommet de G vérifiant $d(x, y) = e(x)$; enfin, soit z un sommet de G vérifiant $d(y, z) = e(y)$. Montrez que le diamètre de G est égal à $d(y, z)$.

Et pour finir ...

Question 15 Soient $k \geq 1$ et $n \geq k + 1$. Montrez que si l'on choisit $k + 1$ sommets du graphe P_n , il en existe deux dont la distance est multiple de k .

FIN