

**Option Informatique en Spé MP et MP\***  
**Séparateurs minimaux de deux mots (d'après Emmanuelle Garel)**  
**Devoir à rendre après les vacances de la Toussaint**

►  $A$  désigne un alphabet. La notion de *sous-mot* est supposée connue. Soient  $u$  un mot et  $i$  et  $j$  deux entiers tels que  $1 \leq i \leq j \leq |u|$ ; nous noterons  $u[i..j]$  le mot  $u_i u_{i+1} \dots u_{j-1} u_j$ .

► Soient  $u$  et  $v$  deux mots distincts. Un *séparateur* de  $u$  et  $v$  est un mot  $w$  qui est sous-mot d'un et un seul des deux mots  $u$  et  $v$ . Notons  $\text{sep}(u, v)$  l'ensemble des séparateurs de  $u$  et  $v$ .

**Question 1** Montrez que deux mots distincts possèdent au moins un séparateur.

**Question 2** Déterminez les séparateurs de  $u = abab$  et  $v = babb$

**Question 3** Soient  $u$  un mot et  $a$  une lettre. Que pouvez-vous dire d'un séparateur de  $u$  et  $ua$ ?

► Parmi les séparateurs de deux mots  $u$  et  $v$  distincts, on considère l'ensemble noté  $\text{sepmin}(u, v)$  des séparateurs de longueur minimale; nous dirons que ce sont les *séparateurs minimaux* de  $u$  et  $v$ . Notons  $\ell_{\min}(u, v)$  leur longueur commune.

**Question 4** Déterminez les séparateurs minimaux de  $u = acbab$  et  $v = abbcac$ .

► Soit  $w$  un séparateur minimal des deux mots  $u$  et  $v$  distincts. Supposons, pour fixer les idées, que  $w$  est sous-mot de  $u$ . Notons  $a$  la dernière lettre de  $w$  et  $w'$  le préfixe de  $w$  de longueur  $|w| - 1$ ; ainsi  $w = w'a$ .

**Question 5** Montrez que  $w'$  est un sous-mot de  $v$ .

**Question 6** Montrez que  $w \in \text{sep}(v, va)$  et que  $w \notin \text{sep}(u, ua)$ .

► Notons  $X \Delta Y$  la différence symétrique de deux ensembles  $X$  et  $Y$ : c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à un et un seul de ces deux ensembles. Notons  $S(u, v) = \bigcup_{a \in A} \text{sep}(u, ua) \Delta \text{sep}(v, va)$ . Il résulte de

la question précédente que  $\text{sepmin}(u, v)$  est contenu dans  $S(u, v)$ . Notons  $\widehat{S}(u, v)$  l'ensemble des éléments de  $S(u, v)$  de longueur minimale; nous nous proposons d'établir  $\text{sepmin}(u, v) = \widehat{S}(u, v)$ .

► Soit  $w \in \widehat{S}(u, v)$ . Notons  $a$  la dernière lettre de  $w$ , et supposons  $w \in \text{sep}(u, ua)$  pour fixer les idées.

**Question 7** Justifiez la majoration  $|w| \leq \ell_{\min}(u, v)$ .

► Notons  $r$  le plus grand indice tel que  $w' = w[1..r]$  soit sous-mot de  $v$ . Nous nous proposons de montrer que  $r = |w|$ ; pour ce faire, nous raisonnerons par l'absurde, en supposant  $r < |w|$ .

**Question 8** Montrez que l'hypothèse  $r + 1 = |w|$  mène à une contradiction.

**Question 9** Montrez que, si  $|w| > r + 1$ , alors  $w[1..r + 1] \in \text{sep}(u, v)$  et mettez en évidence une contradiction.

**Question 10** Concluez!

**Question 11** Soient  $u$  et  $w$  deux mots et  $j \in \llbracket 1, |w| \rrbracket$ . Supposons que  $w[1..j]$  est sous-mot de  $u$ . Justifiez l'existence d'un indice  $r \in \llbracket 1, |u| \rrbracket$  tel que  $w[1..j]$  soit un séparateur de  $u[1..r - 1]$  et  $u[1..r]$ .

► Définissons alors  $\ell_j(w, u)$  comme suit: si  $w[1..j]$  est sous-mot de  $u$ , alors  $\ell_j(w, u) = r$ ; sinon,  $\ell_j(w, u) = \infty$ .

**Question 12** Soit  $j \in \llbracket 1, |w| - 1 \rrbracket$  vérifiant  $\ell_j(w, u) < \infty$ . Montrez que  $\ell_j(w, u) < \ell_{j+1}(w, u)$ .

**Question 13** Supposons  $j \geq 2$  et notons  $r' = \ell_{j-1}(w, u)$ . Montrez que  $w_j$  n'a aucune occurrence dans  $u[r' + 1..r - 1]$ .

**Question 14** Montrez que  $w[1..j] = u_{\ell_1(w, u)} u_{\ell_2(w, u)} \dots u_{\ell_j(w, u)}$ .

► Soient  $u$  et  $v$  deux mots distincts, et  $w \in \text{sepmin}(u, v)$ . Pour  $1 \leq j \leq |w|$ , notons  $x_j = \ell_j(w, u)$  et  $y_j = \ell_j(w, v)$ .

**Question 15** Soit  $j \in \llbracket 1, |w| \rrbracket$  tel que  $x_j < \infty$  et  $y_j < \infty$ . Montrez que  $w[1..j]$  appartient à

$$\text{sep}(u[1..x_j - 1], u[1..x_j]) \cap \text{sep}(v[1..y_j - 1], v[1..y_j])$$

et que ce mot est de longueur minimale parmi les éléments de cet ensemble.

**À SUIVRE...**