Option Informatique en Spé MP et MP*
Graphes et protocole d'information de routage : le corrigé

Graphes : connectivité

Question 1 • Réflexivité : prendre $x_0 = s$ (chemin de longueur nulle). Symétrie : «retourner» le chemin, en notant $y_i = x_{n-i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Transitivité : soient $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ un chemin menant de s à t et $(y_j)_{0\leqslant j\leqslant p}$ un chemin menant de t à u ; alors le chemin $(z_k)_{0\leqslant k\leqslant n+p}$ défini par $z_k = x_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $z_k = y_{k-n}$ pour $n+1 \leqslant k \leqslant n+p$ mène de s à u.

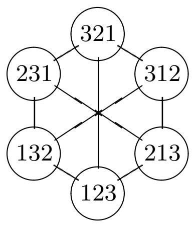
Question 2 • Considérons un chemin $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de longueur n minimale menant de s à t. S'il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $j \in [\![i+1, n]\!]$ tels que $x_i = x_j$, alors le chemin $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n-j+i}$ défini par $y_k = x_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant i$ et $y_k = x_k - j + 1$ pour $i+1 \leqslant k \leqslant n-j+i$ mène de s à t, et sa longueur $n-j+i$ est strictement inférieure à n : ceci contredit l'hypothèse de minimalité faite sur n. Donc le chemin considéré est élémentaire.

Question 3 • Il est clair que $d(s,t) \geqslant 0$, $d(s,s) = 0$ et $d(s,t) = d(t,s)$. Il reste à établir l'inégalité triangulaire ; celle-ci est claire si $d(s,t) = +\infty$ ou $d(t,u) = +\infty$. Sinon, notons $n = d(s,t)$ et $p = d(t,u)$; il existe des chemins de longueurs respectives n et p, menant de s à t et de t à u. Par concaténation, nous obtenons un chemin menant de s à u, de longueur $n+p$; de par la définition de la distance, nous en déduisons $d(s,u) \leqslant n+p$, ce qui est le résultat recherché.

Question 4 • Il suffit de prendre un chemin de longueur minimale.

Question 5 • Les égalités $f = \tau \circ g$ et $g = \tau \circ f$ sont équivalentes, puisque $\tau \circ \tau = id$: la définition est donc symétrique, et par conséquent l'on a bien un graphe non orienté.

Question 6 • Γ_3 possède six sommets et neuf arêtes. Sur le dessin, chaque arête verticale corespond à $\tau_{1,3}$, chaque arête oblique montante à $\tau_{1,2}$ et chaque arête oblique descendante à $\tau_{2,3}$.



Question 7 • Γ_n compte $n!$ sommets, puisque $n!$ est le cardinal du groupe symétrique sur un ensemble de cardinal n.

Question 8 • Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet s donné est le nombre de transpositions, soit $\frac{n(n-1)}{2}$.

Question 9 • Comme il existe $n!$ sommets, le nombre total d'arêtes est $\frac{n(n-1)n!}{4}$: il ne faut pas oublier de diviser par 2, sinon chaque arête est comptée deux fois.

Question 10 • Le diamètre de Γ_n est $n-1$: en effet, on peut passer d'une permutation à une autre en effectuant au plus $n-1$ transpositions ; et ce maximum est atteint avec une permutation circulaire.

Question 11 • Pour montrer que $t \in V_n$ ssi $d(s,t) = n$, nous allons raisonner par récurrence sur n. Sens direct : le résultat est clair pour $n = 0$; supposons-le acquis au rang n. Soit $t \in V_{n+1}$; alors $t \notin W_n$ et t est voisin de $u \in V_n$. Donc $d(s,t) > n$ et $d(s,t) \leqslant d(s,u) + d(u,t) = n+1$, si bien que $d(s,t) = n+1$. Réciproquement, si $d(s,t) = n+1$, considérons un chemin $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n+1}$ menant de s à t : le chemin $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est élémentaire, puisqu'il fait partie d'un chemin élémentaire, donc $d(s, x_n) = n$, si bien que $x_n \in V_n$. Comme t est voisin de x_n mais $t \notin V_n$, nous en déduisons $t \in V_{n+1}$

• L'assertion $x \in W_n$ ssi $d(s,x) \leqslant n$ découle alors de la remarque suivante : $W_n = \bigcup\limits_{0\leqslant k\leqslant n} V_k$.

Question 12 • Nous avons $V_n \subset W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\bigcup\limits_{0\leqslant n} V_n \subset \bigcup\limits_{0\leqslant n} W_n$. L'inclusion inverse se déduit de $W_n = \bigcup\limits_{0\leqslant k\leqslant n} V_k \subset \bigcup\limits_{0\leqslant k} V_k$.

Question 13 • La preuve se réduit à constater que les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes : t appartient à la composante connexe de s ; $d(s,t) < +\infty$; $d(s,t) \in \mathbb{N}$; $t \in \mathcal{C}(s)$.

Question 14 • Il suffit de montrer que $W_p = W_{p+1}$ implique $W_{p+2} \subset W_{p+1}$: nous aurons alors $W_{p+2} = W_{p+1}$; puis, par récurrence, la suite $(W_n)_{n \geqslant p}$ sera constante.

Soit donc $t \in W_{p+2}$: alors $d(s,t) \leqslant p+2$. Observons un chemin $(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant p+2}$ menant de s à t : alors $(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant p+1}$ est un chemin menant de s à y_{p+1}, donc $d(s, y_{p+1}) \leqslant p+1$, puis $y_{p+1} \in W_{p+1}$, donc $y_{p+1} \in W_p$, puis $d(s, y_{p+1}) \leqslant p$ et enfin $d(s,t) \leqslant p+1$ soit $t \in W_{p+1}$.

Question 15 • Il suffit de construire les ensembles W_n, en s'arrêtant lorsque l'on en trouve deux consécutifs égaux. Comme $|W_0| = 1$ et $|W_n| \leqslant |S|$, ceci se produit au bout de $|S|$ étapes au plus.

Question 16 • Dans une composante connexe, la somme des degrés des sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes ; elle est donc paire, si bien que le nombre de sommets de degré impair doit être pair. Si le graphe comporte exactement deux sommets de degré impair, ceux-ci doivent donc être dans la même composante connexe, et par suite ils sont reliés par un chemin.

• Remarquons que le résultat est faux pour un graphe infini. Prenons par exemple $S = \mathbb{N}$, les arêtes étant les paires $\{k, k+2\}$: le graphe possède deux composante, $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$. Les seuls sommets de degré impair sont 0 et 1, or ils ne sont pas dans la même composante.

Graphes : biconnectivité

Question 17 • Nous allons montrer que a n'est pas un pont ssi il existe au moins un cycle passant par a.

Sens direct : supposons que a n'est pas un pont. Notons s et t les extrémités de a. Comme G_a est connexe, il existe un chemin $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ menant de s à t dans G_a. Notons alors $x_{n+1} = s$: le chemin $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ est un cycle de G passant par a.

Réciproque : supposons qu'il existe un cycle $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ qui passe par a ; on ne restreint pas la généralité en supposant $a = \{x_0, x_1\}$. Soient s et t deux sommets de G : ils sont reliés par un chemin $(y_j)_{0 \leqslant j \leqslant p}$; si celui-ci ne passe pas par a, c'est encore un chemin de G_a. Sinon, il existe un indice $j \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $a = \{y_j, y_{j+1}\}$. Remplaçons l'arête a par le chemin $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$: nous obtenons un chemin menant de s à t dans G_a.

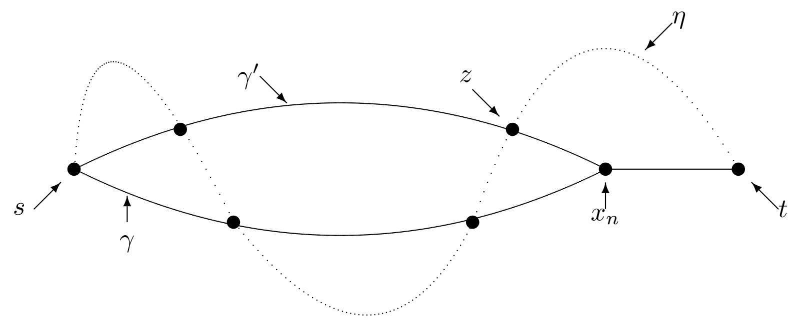
Question 18 • Considérons un graphe connexe G à deux sommets s et t. L'arête $a = \{s,t\}$ est un pont mais aucune de ses extrémités n'est un point d'articulation de G. L'affirmation de Jean-Marcel est vraie pour un graphe connexe comportant au moins trois sommets, situation qui est précisément celle dans laquelle se place l'énoncé.

Question 19 • Sens direct : soient G biconnecté et s un sommet de G. Soient x et y deux sommets de G_s ; il existe dans G deux chemins disjoints menant de x à y ; l'un d'eux au moins ne passe pas par s, et est donc un chemin de G_s. Ceci prouve que s n'est pas un point d'articulation de G.

Réciproque : supposons que G ne possède pas de point d'articulation. Soient s et t deux sommets distincts, montrons qu'ils sont reliés par au moins deux chemins disjoints ; nous raisonnerons par récurrence sur $d(s,t)$.

Si $d(s,t) = 1$, alors s et t sont adjacents ; chacun de ces sommets est de degré au moins 2 ; soit x un voisin de t autre que s. Comme G_t est connexe, il existe un chemin dans G_t menant de s à x ; en ajoutant à ce chemin l'arête $\{x,t\}$ on obtient un chemin menant de s à t, disjoint du chemin constitué par l'arête $\{s,t\}$.

Supposons le résultat acquis lorsque $d(s,t) = n$, et considérons deux sommets s et t tels que $d(s,t) = n+1$. Considérons un chemin élémentaire $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ reliant s et t. Par hypothèse de récurrence, il existe deux chemins γ et γ' disjoints reliant s et x_n. Si l'un de ces chemins passe par t, le résultat est clair. Sinon, comme G_{x_n} est connexe, il existe dans G_{x_n} un chemin η reliant s et t ; si η est disjoint de γ ou de γ', le résultat est à nouveau clair. Sinon, notons z le dernier sommet appartenant à $\gamma \cup \gamma'$ lorsque l'on parcourt η de s à t ; supposons que z se trouve sur γ' pour fixer les idées. Nous mettons en évidence deux chemins disjoints qui relient s et t, à savoir γ, et le chemin obtenu en suivant γ' de s à z, puis η de z à t.



Question 20 • La preuve se réduit à la remarque suivante : il existe un cycle élémentaire passant par s et t ssi il existe deux chemins disjoints reliant s et t.

Le protocole d'information de routage (RIP)

Question 21 • Ni A, ni D n'obtient d'informations lui permettant de raccourcir une route : le réseau a convergé.

Question 22 • La chronologie des événements influe sur le délai au bout duquel le réseau converge. Nous allons supposer que chaque routeur diffuse sa table à ses voisins à chaque fois qu'il l'a modifiée. Les événements se déroulent donc comme suit :

1. après allumage, E diffuse sa table ; seul D la reçoit ;
2. D ajoute donc E dans sa propre table et la diffuse à B et E ;
3. E apprend l'existence de D, B et A ; il les ajoute donc dans sa table ;
4. en même temps, B apprend l'existence de E, et ajoute dans sa table une entrée indiquant qu'une route de longueur 2 commençant par le lien 2 mène à E ;
5. E diffuse sa table à ses voisins ; seul D la reçoit, mais n'apprend rien de nouveau ;
6. B diffuse sa table à ses voisins ; D la reçoit, mais il n'apprend rien de nouveau ; en revanche, A apprend l'existence de A, et ajoute dans sa table une entrée indiquant qu'une route de longueur 3 commençant par le lien 1 mène à E ;
7. A diffuse sa table à ses voisins ; seul B la reçoit, mais il n'apprend rien de nouveau.

Le réseau a convergé.

Question 23 • Même remarque qu'à la question 22.

Question 24 • Notons $L(t)$ la somme des longueurs des routes indiquées dans les tables, à l'instant t ; notons t_0 la date à laquelle tous les routeurs allumés. Commençons par remarquer qu'à partir de t_0, la quantité $L(t)$ n'augmente plus : elle ne peut que diminuer, tout en restant strictement positive. Il s'agit de prouver que $L(t)$ stationne au bout d'un temps fini. Plaçons-nous à un instant $t \geqslant t_0$; trois situations peuvent se produire :

1. il existe ou moins un routeur qui reçu de l'un de ses voisins immédiats des informations lui permettant de modifier sa table, mais n'a pas encore effectué cette modification ; à un instant $t' > t$, ce routeur aura pris en compte ces informations et modifié sa table en conséquence ;
2. il existe ou moins un routeur qui a modifié sa table mais n'en pas encore informé ses voisins immédiats ; à un instant $t' > t$, ce routeur aura diffusé sa table modifiée à ses voisins immédiats ;
3. tous les routeurs ont pris note des informations transmises par leurs voisins immédiats, en ont tenu compte, et ont éventuellement informé en retour ces mêmes voisins immédiats.

Chaque passage par la situation 1 amène une diminution d'au moins une unité de la quantité L, donc $L(t') < L(t)$, et sera suivi à un instant $t'' > t'$ par un passage par la situation 2. Le nombre de passages par les situations 1 et 2 est donc fini ; comme l'intervalle de temps entre deux de ces passages est fini, le réseau se retrouvera au bout d'un temps fini dans la situation 3, dans laquelle il aura convergé.

Question 25 • La réponse est négative : considérons un réseau formé de quatre routeurs A, B, C, D et des liens AB, BC, CD et DA. Allumons d'abord A et B et attendons que le réseau se stabilise ; si l'on allume

Question 26 •• Soient s et t deux routeurs du réseau ; montrez que s'il existe dans l'état $\mathcal{S}$ un chemin menant de s à t, alors les tables de routage permettent *effectivement* de trouver un tel chemin.

Question 27 • L'unicité du chemin résulte du fait que chaque routeur ne conserve, dans sa table, qu'un lien vers chaque cible qu'il sait (ou plutôt *pense*) pouvoir atteindre.

•• Montrez que ce chemin est de longueur minimale.

Question 28 • En fait, chaque routeur a sa propre numérotation des liens qui en partent. Le lien entre les routeurs A et B peut fort bien porter le numéro 1 pour A, et le numéro 255 pour B.

Question 29 • Il y a quatre cas à examiner :

```
let min_dist d d' = match (d,d') with
 | (Fini n,Infini) -> Fini n
 | (Infini,Fini n) -> Fini n
 | (Fini n,Fini n') -> Fini (min n n')
 | (Infini,Infini) -> Infini ;;
```

Question 30 • La route r est un triplet (c, v, d). Si la table t ne contient aucune route menant à c, on ajoute la route $(c, v, d+1)$ à t ; sinon, notons $r' = (c, v', d')$ la route vers c donnée par t. Si $d < d' - 1$, alors on remplace r' par la route $(c, v, d' + 1)$; sinon, la mise à jour est finie, puisque chaque table de routage donne *une seule* route vers une cible donnée.

Pour éclaircir la présentation, nous sommes amenés à écrire deux fonctions :

- `inf_dist : dist -> dist -> bool`, spécifiée comme suit : `inf_dist d d'` indique si $d < d'$;
- `incr_dist : dist -> dist`, spécifiée comme suit : `incr_dist d` calcule $d + 1$, dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

```
let inf_dist d d' = match (d,d') with
 | (Fini n,Infini) -> true
 | (Infini,Fini n) -> false
 | (Fini n,Fini n') -> n < n'
 | (Infini,Infini) -> false ;;

let incr_dist = function
 | Infini -> Infini
 | Fini n -> Fini (n+1) ;;

let rec mise_à_jour_route t n r = match t with
 | [] -> [{cible = r.cible; via = n; distance = incr_dist r.distance}]
 | t::q when t.cible <> r.cible -> t::(mise_à_jour_route q n r)
 | t::q when inf_dist t.distance r.distance -> t::q
 | _::q -> {cible = r.cible; via = n; distance = incr_dist r.distance}::q
;;
```

Question 31 • Écriture immédiate.

```
let rec mise_à_jour t n = function
 | [] -> t
 | r::q -> let tt = mise_à_jour_route t n r in mise_à_jour tt n q ;;
```

RIP face aux pannes

Question 32 • En 30 secondes, le lien peut acheminer $30 \times 10^7 = 300 \times 10^6$ bits, soit 37×10^6 octets (un peu moins en fait, car les octets sont groupés en trames, précédées et suivies d'informations supplémentaires). Chaque table occupe $20 \times 1000 = 2 \times 10^4$ octets ; comme chacun des deux routeurs émet sa table toutes les 30 secondes, le routage consomme $2 \times \dfrac{2 \times 10^4}{37 \times 10^6} \approx 0.1\%$ de la bande passante. Remarque, dans la réalité, les tables sont beaucoup plus grandes (de deux ou trois ordres de grandeurs) mais les liens ont un débit de l'ordre du gigabit par seconde ...

Question 33 • Il s'agir de parcourir la table, en modifiant la valeur du champ `distance` à chaque fois que la valeur du champ `via` est n.

```
let rec lien_mort n = function
 | [] -> []
 | t::q when t.via = n -> let t' = {cible = t.cible ; via = n ; distance = Infini }
   in t'::(lien_mort n q)
 | t::q -> t::(lien_mort n q) ;;
```

Question 34 • Même remarque qu'à la question 22.

Question 35 •• Montrez que le sous-réseau constitué par A et C va diverger, même après la constatation par C de la coupure du lien 5. Plus précisément, vous montrerez que, dans les tables de A et C, vont apparaître des routes inexistantes, et de longueurs croissantes avec le temps.

Question 36 •• Décrivez ce qui se passe, avec cette amélioration.

Question 37 • Si l'on diminue le seuil δ, le ≪comptage à l'infini≫ durera moins longtemps ; l'inconvénient est que le diamètre du réseau sera limité à $\delta - 1$. Dans l'Internet, on a fixé $\delta = 15$: en pratique, chaque paquet IP contient, dans son en-tête un champ TTL (*Time To Live*) initialisé à 16 et décrémenté par chaque routeur. Lorsqu'un routeur met ce champ à 0, il jette le paquet sans autre forme de procès.

Question 38 • Notons d la longueur de la route connue de y et menant à z. Au vu se sa table, x connaît une route de longueur $n+1$ menant à z, dont la première étape est y ; en informer y ne sert à rien, puisque celui-ci en déduira une route de longueur $n+2$ menant à z, donc plus longue que celle qu'il connaît déjà.

Dans notre cas, chacun des deux routeurs ne donnera à l'autre que des indications de routes dont la première étap *n'est pas* l'autre. Ceci interdit la divergence mise en évidence à la question 35. Bien entendu, cette amélioration n'empêche pas des situations plus complexes menant à la divergence : supposons par exemple que trois routeurs A, B et C se trouvent simultanément coupés du reste du réseau ; le scénario catastrophe est celui où A (resp. B puis C) transmet sa table à B (resp. C puis A) juste avant de constater la coupure : les trois routeurs peuvent entrer dans un «cycle infernal» qui mènera à la divergence le sous-réseau qu'ils forment.

Question 39 •• Décrivez l'effet de la méthode «horizon partagé avec empoisonnement des routes», dans le scénario de coupure simultanée des liens 1 et 5.

FIN