Option Informatique en Spé MP et MP*
L'approche matricielle de la théorie des automates
Le corrigé

Lien entre automates et matrices

Question 1 • Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, le seul mot à considérer est ε, qui est l'étiquette du calcul «vide» menant de ℓ à ℓ ; or Δ^0 est la matrice identité, dont les coefficients égaux à 1 sont justement ceux de la diagonale.

• Supposons le résultat acquis au rang n. Soit $u = vx$ un mot de longueur $n+1$, avec $x \in \Sigma$, donc v de longueur n. u est l'étiquette d'un calcul menant de ℓ à k ssi il existe un état q tel que v soit l'étiquette d'un calcul memant de ℓ à q, et si (q, x, k) est une transition de $\mathcal{A}$; mais ces deux conditions équivalent à l'existence de $q \in [\![1, n]\!]$ tel que $(\Delta^n)_{\ell,q} = 1$ et $\Delta_{q,k} = 1$; ce qui est vrai ssi $\displaystyle\sum_{1 \leqslant q \leqslant p} (\Delta^n)_{\ell,q}\Delta_{q,k} = 1$, soit précisément $(\Delta^{n+1})_{\ell,k} = 1$.

Question 2 • Il suffit de remarquer que si $\Delta_{\ell,k} = 0$, alors il n'existe aucune transition de ℓ vers k, donc $(\Pi^{[x]})_{\ell,k} = 0$ quelle que soit la lettre x, et par suite $\displaystyle\Big(\sum_{x \in \Sigma} \Pi^{[x]}\Big)_{\ell,k} = 0$. En revanche, si $\Delta_{\ell,k} = 1$, il existe au moins une transition de ℓ vers k ; notant x la lettre qui étiquette cette transition, nous aurons $(\Pi^{[x]})_{\ell,k} = 1$, et par suite $\displaystyle\Big(\sum_{x \in \Sigma} \Pi^{[x]}\Big)_{\ell,k} = 1$.

Question 3 • Raisonnons par récurrence sur la longueur n du mot u. Le cas $n = 0$ (soit $u = \varepsilon$) a été vu à la question 1. Supposons l'assertion de l'énoncé acquise au rang n, et soit $u = vx$ un mot de longueur $n+1$, avec $x \in \Sigma$, et donc v de longueur n. Supposons qu'il existe un calcul de $\mathcal{A}$ étiqueté par u et menant de l'état ℓ à l'état k ; notons q l'avant-dernier état par lequel passe ce calcul. Le calcul de $\mathcal{A}$ menant de ℓ à q a pour étiquette v, et la transition menant de q à k a pour étiquette x. Avec l'hypothèse de récurrence, nous avons $(\Pi^{[v]})_{\ell,q} = 1$; par ailleurs, $(\Pi^{[x]})_{q,k} = 1$. Nous en déduisons

$$(\Pi^{[u]})_{\ell,k} = (\Pi^{[v]} \cdot \Pi^{[x]})_{\ell,k} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} (\Pi^{v]})_{\ell,j}(\Pi^{[x]})_{j,k} \geqslant (\Pi^{[v]})_{\ell,q}(\Pi^{[x]})_{q,k} = 1$$

Donc $(\Pi^{[u]})_{\ell,k} = 1$.

• Réciproquement, si cette égalité est vérifiée, c'est qu'il existe au moins un indice j tel que $(\Pi^{[v]})_{\ell,j}(\Pi^{[x]})_{j,k} = 1$, soit $(\Pi^{[v]})_{\ell,j} = (\Pi^{[x]})_{j,k} = 1$. Donc v est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ menant de ℓ à j, et x est l'étiquette d'une transition menant de j à k ; par suite, $u = vx$ est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ menant de ℓ à k.

Question 4 • Supposons $u \in \Sigma^*$ reconnu par $\mathcal{A}$: u est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ menant d'un état initial i à un état final f. Du coup, $(\Pi^{[u]})_{i,f} = 1$; donc $\displaystyle(\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} (\Pi^{[u]})_{i,k}\mathbf{F}_j \geqslant (\Pi^{[u]})_{i,f}\mathbf{F}_f = 1$; puis $\displaystyle\mathbf{I}^\mathsf{T} \cdot \Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \mathbf{I}_j \times (\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_j \geqslant \mathbf{I}_i \times (\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_i = 1$.

• Réciproquement, supposons $\mathbf{I}^\mathsf{T} \cdot \Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F} = 1$. D'après le calcul précédent, il existe au moins un indice $\ell \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathbf{I}_\ell \times (\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_\ell = 1$, soit $\mathbf{I}_\ell = 1$ et $(\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_\ell = 1$. La première condition fait que ℓ est un état initial. En exploitant toujours le calcul précédent, la deuxième nous dit qu'il existe un indice $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $(\Pi^{[u]})_{\ell,k}\mathbf{F}_k = 1$, soit $(\Pi^{[u]})_{\ell,k} = 1$ et $\mathbf{F}_k = 1$. D'après la question 3, la première condition nous dit que u est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ menant d'un état initial ℓ à l'état k, la deuxième que k est final. Conclusion : $u \in \Sigma^*$ est reconnu par $\mathcal{A}$.

Applications de l'approche matricielle

Question 5 • $|Q| = n$, donc $\big|\mathcal{M}_p(\mathcal{B})\big| = 2^{p^2}$ et finalement $|Q'| = \big|Q \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B})\big| = |Q| \cdot \big|\mathcal{M}_p(\mathcal{B})\big| = p \cdot 2^{p^2}$.

Question 6 • Soient $q \in Q$, $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_p(\mathcal{B})$ et $x \in \Sigma$. Il existe une transition et une seule de $\mathcal{A}$ partant de q et étiquetée par x ; il existe donc une transition et une seule partant de $(q, \mathbf{M})$ et étiquetée par x : elle mène à l'état $\big(\delta(q,x), \mathbf{M} \cdot \Pi^{[x]}\big)$. $\mathcal{A}'$ n'a qu'un seul état initial, à savoir i' ; donc cet automate est déterministe et complet.

Question 7 • Procédons par récurrence sur $n = |u|$. Pour $u = \varepsilon$, nous avons $\delta'^*\big((q,\mathbf{M}),u\big) = (q, \mathbf{M})$, donc $\delta(q,u) = u$ et $\mathbf{M} \cdot \Pi^{[u]} = \mathbf{M}$: ce qui établit l'égalité au rang $n = 0$.

• Supposons l'égalité acquise lorsque $|u| = n$. Soit $u \in \Sigma^{n+1}$; soient $v \in \Sigma^n$ et $x \in \Sigma$ définis par $u = vx$. Alors $\delta'^*\big((q,\mathbf{M}),v\big) = (q', \mathbf{M}')$ où $q' = \delta(q,v)$ et $\mathbf{M}' = \mathbf{M} \cdot \Pi^{[v]}$; donc :

$$\delta'^*\big((q,\mathbf{M}),u\big) = \delta'^*\big((q,\mathbf{M}),vx\big) = \delta'\big(\delta'^*\big((q,\mathbf{M}),v\big),x\big) = \delta'\big((q',\mathbf{M}'),x\big) = \big(\delta(q',x), \mathbf{M}' \cdot \Pi^{[x]}\big)$$

Mais $\delta(q',x) = \delta\big(\delta^*(q,v),x)\big) = \delta^*(q,vx) = \delta^*(q,u)$; et $\mathbf{M}' \cdot \Pi^{[x]} = \mathbf{M} \cdot \Pi^{[v]} \cdot \Pi^{[x]} = \mathbf{M} \cdot \Pi^{[vx]} = \mathbf{M} \cdot \Pi^{[u]}$. Donc $\delta'^*\big((q,\mathbf{M}),u\big) = \big(\delta^*(q,u), \mathbf{M} \cdot \Pi^{[u]}\big)$ ce qui établit l'égalité au rang $n+1$.

Question 8 • Soit $u \in \sqrt{L}$: $uu \in L$. Donc uu est l'étiquette d'un calcul réussi de $\mathcal{A}$; notons $q = \delta^*(i,u)$ et $f = \delta^*(q,u)$, ainsi $f \in F$. Faisons lire le mot u à l'automate $\mathcal{A}'$ placé dans son état initial. Comme $\mathcal{A}'$ est déterministe et complet, ce calcul se termine dans l'état $(q, \Pi^{[u]})$, dont il suffit de montrer qu'il est final ; or, comme u est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ menant de q à f, nous pouvons affirmer que $(\Pi^{[u]})_{q,f} = 1$, donc $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant p} (\Pi^{[u]})_{q,k} \mathbf{F}_k = 1$ puis $(\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_q = 1$ ce qui montre que $(q, \Pi^{[u]})$ est final.

• Soit maintenant u reconnu par $\mathcal{A}'$. u est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}'$ commençant en $(i, \mathbf{Id})$ et finissant dans un état $(q, \Pi^{[u]}) \in F'$. Mais ceci implique $(\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_q = 1$, donc il existe un état final f de $\mathcal{A}$ tel que $(\Pi^{[u]})_{q,f} = 1$: ceci revient à dire que u est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ menant de q à f. Par ailleurs, u est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ menant de i à q. Donc uu est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ menant de i à $f \in F$, ce qui prouve que uu est reconnu par $\mathcal{A}$, si bien que $uu \in L$ et finalement $u \in \sqrt{L}$.

Fonctions conservant la rationalité

Question 9 • Remarquons que $\mathcal{A}'$ est déterministe et complet, pour les mêmes raisons que celles invoquées à la question 6.

• Soit $u \in \mathcal{T}(L, \mathrm{id})$. Il existe donc un mot v vérifiant $|v| = |u|$, et tel que uv appartienne à L. Par suite, il existe un calcul réussi de $\mathcal{A}$, d'étiquette uv. Notons alors $q = \delta(i,u)$, $\mathbf{M} = \Delta^{|u|}$ et $f = \delta^*(i,uv) = \delta^*(q,v)$; nous aurons $\delta'^*(i',u) = (q,\mathbf{M})$: la preuve de cette égalité est très semblable à celle de l'égalité établie à la question 7, et ne sera donc pas détaillée ici. v est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ qui commence en q et se termine en f ; donc $\mathbf{M}_{q,f} = 1$, et par suite $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$ ce qui montre que $(q, \mathbf{M})$ est un état final de $\mathcal{A}'$. Résumons : u est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}'$ qui commence en i' et se termine en $(q, \mathbf{M}) \in F'$: donc u est reconnu par $\mathcal{A}'$.

• Réciproquement, soit u un mot reconnu par $\mathcal{A}'$: u est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}'$ qui commence en i' et se termine dans un état final $(q, \mathbf{M})$ de $\mathcal{A}'$. Mais alors $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$, donc il existe au moins un calcul de $\mathcal{A}$, de longueur $|u|$, commençant en q et se terminant dans un état final f de $\mathcal{A}$; notons v l'étiquette d'un tel calcul. Alors uv est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ commençant en i et finissant en f : donc uv est reconnu par $\mathcal{A}$, ou encore $uv \in L$; mais $|v| = |u|$, si bien que $u \in \mathcal{T}(L, \mathrm{id})$.

Question 10 • En nous inspirant de l'exemple précédent, nous allons construire un automate fini déterministe complet $\widehat{\mathcal{A}} = (\widehat{Q}, \widehat{\delta}, \widehat{\imath}, \widehat{F})$ qui reconnaît $\mathcal{T}(L, g)$. Définissons :

- $\widehat{Q} = Q \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B})$;
- $\widehat{\delta}\big((q,\mathbf{M}),x\big) = \big(\delta(q,x), \mathbf{M}^2\big)$;
- $\widehat{\imath} = (\imath, \Delta)$;
- $\widehat{F}$ est l'ensemble des couples $(q, \mathbf{M})$ tels que $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$.

Une récurrence immédiate montre que $\widehat{\delta}^*(\widehat{\imath}, u) = \big(\delta(\imath,u), \Delta^{2^{|u|}}\big)$.

• Soit $u \in \mathcal{T}(L, g)$. Il existe donc un mot v vérifiant $|v| = g(|u|)$, soit $|v| = 2^{|u|}$, et tel que uv appartienne à L. Par suite, il existe un calcul réussi de $\mathcal{A}$, d'étiquette uv. Notons alors $q = \delta(i,u)$, $\mathbf{M} = \Delta^{2^{|u|}}$ et

$f = \delta^*(i, uv) = \delta^*(q, v)$. Nous aurons $\widehat{\delta}^*(i', u) = (q, \mathbf{M})$. v est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ de longueur $2^{|u|}$, qui commence en q et se termine en f ; donc $\mathbf{M}_{q,f} = 1$, et par suite $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$ ce qui montre que $(q, \mathbf{M})$ est un état final de $\widehat{\mathcal{A}}$. Résumons : u est l'étiquette d'un calcul de $\widehat{\mathcal{A}}$ qui commence en $\widehat{\imath}$ et se termine en $(q, \mathbf{M}) \in \widehat{F}$: u est reconnu par $\widehat{\mathcal{A}}$.

• Réciproquement, soit u un mot reconnu par $\widehat{\mathcal{A}}$: u est l'étiquette d'un calcul de $\widehat{\mathcal{A}}$ qui commence en $\widehat{\imath}$ et se termine dans un état final de $\widehat{\mathcal{A}}$, que nous noterons $(q, \mathbf{M})$ avec $q = \delta(i, u)$ et $\mathbf{M} = \Delta^{2^{|u|}}$. Mais alors $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$, donc il existe au moins un calcul de $\mathcal{A}$, de longueur $2^{|u|}$, commençant en q et se terminant dans un état final f de $\mathcal{A}$; notons v l'étiquette d'un tel calcul. Alors uv est l'étiquette d'un calcul de $\mathcal{A}$ commençant en i et finissant en f : donc uv est reconnu par $\mathcal{A}$, ou encore $uv \in L$; mais $|v| = 2^{|u|} = g(|u|)$, si bien que $u \in \mathcal{T}(L, g)$.

Question 11 • La construction est un peu plus compliquée : nous partons de la relation $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$. Si l'automate $\mathcal{A} = (Q, \delta, I, F)$ reconnaît L, alors l'automate $\widetilde{A} = (\widetilde{Q}, \widetilde{\delta}, \widetilde{\imath}, \widetilde{F})$ décrit ci-dessous reconnaît $\mathcal{T}(L, h)$:

- $\widetilde{Q} = Q \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B}) \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B})$;
- $\widetilde{\delta}\big((q, \mathbf{M}, \mathbf{P}), x\big) = \big(\delta(q, x), \mathbf{M} \cdot \Delta, \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} \cdot \Delta\big)$;
- $\widetilde{\imath} = (i, \mathbf{Id}, \mathbf{Id})$;
- $\widetilde{F}$ est l'ensemble des triplets $(q, \mathbf{M}, \mathbf{P})$ tels que $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{F})_q = 1$.

La justification repose sur la remarque suivante : $\widetilde{\delta}^*(\widetilde{\imath}, u) = \big(\delta(q, u), \Delta^{|u|}, \Delta^{|u|^2}\big)$.

Question 12 • La construction est très semblable à la précédente ; nous prenons cette fois :

- $\overline{Q} = Q \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B}) \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B})$;
- $\overline{\delta}\big((q, \mathbf{M}, \mathbf{P}), x\big) = \big(\delta(q, x), \mathbf{P}, \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}\big)$;
- $\overline{\imath} = (i, \mathbf{Id}, \Delta)$;
- $\overline{F}$ est l'ensemble des triplets $(q, \mathbf{M}, \mathbf{P})$ tels que $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$.

La justification repose sur la remarque suivante : $\overline{\delta}^*(\overline{\imath}, u) = \big(\delta(q, u), \Delta^{F_{|u|}}, \Delta^{F_{|u|+1}}\big)$.

FIN