

# Option Informatique en Spé MP et MP\*

## L'approche matricielle de la théorie des automates

### Le corrigé

#### Lien entre automates et matrices

**Question 1** • Raisonnons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$ , le seul mot à considérer est  $\varepsilon$ , qui est l'étiquette du calcul «vide» menant de  $\ell$  à  $\ell$ ; or  $\Delta^0$  est la matrice identité, dont les coefficients égaux à 1 sont justement ceux de la diagonale.

• Supposons le résultat acquis au rang  $n$ . Soit  $u = vx$  un mot de longueur  $n + 1$ , avec  $x \in \Sigma$ , donc  $v$  de longueur  $n$ .  $u$  est l'étiquette d'un calcul menant de  $\ell$  à  $k$  ssi il existe un état  $q$  tel que  $v$  soit l'étiquette d'un calcul menant de  $\ell$  à  $q$ , et si  $(q, x, k)$  est une transition de  $\mathcal{A}$ ; mais ces deux conditions équivalent à l'existence de  $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $(\Delta^n)_{\ell, q} = 1$  et  $\Delta_{q, k} = 1$ ; ce qui est vrai ssi  $\sum_{1 \leq q \leq p} (\Delta^n)_{\ell, q} \Delta_{q, k} = 1$ , soit précisément  $(\Delta^{n+1})_{\ell, k} = 1$ .

**Question 2** • Il suffit de remarquer que si  $\Delta_{\ell, k} = 0$ , alors il n'existe aucune transition de  $\ell$  vers  $k$ , donc  $(\Pi^{[x]})_{\ell, k} = 0$  quelle que soit la lettre  $x$ , et par suite  $\left( \sum_{x \in \Sigma} \Pi^{[x]} \right)_{\ell, k} = 0$ . En revanche, si  $\Delta_{\ell, k} = 1$ , il existe au moins une transition de  $\ell$  vers  $k$ ; notant  $x$  la lettre qui étiquette cette transition, nous aurons  $(\Pi^{[x]})_{\ell, k} = 1$ , et par suite  $\left( \sum_{x \in \Sigma} \Pi^{[x]} \right)_{\ell, k} = 1$ .

**Question 3** • Raisonnons par récurrence sur la longueur  $n$  du mot  $u$ . Le cas  $n = 0$  (soit  $u = \varepsilon$ ) a été vu à la question 1. Supposons l'assertion de l'énoncé acquise au rang  $n$ , et soit  $u = vx$  un mot de longueur  $n + 1$ , avec  $x \in \Sigma$ , et donc  $v$  de longueur  $n$ . Supposons qu'il existe un calcul de  $\mathcal{A}$  étiqueté par  $u$  et menant de l'état  $\ell$  à l'état  $k$ ; notons  $q$  l'avant-dernier état par lequel passe ce calcul. Le calcul de  $\mathcal{A}$  menant de  $\ell$  à  $q$  a pour étiquette  $v$ , et la transition menant de  $q$  à  $k$  a pour étiquette  $x$ . Avec l'hypothèse de récurrence, nous avons  $(\Pi^{[v]})_{\ell, q} = 1$ ; par ailleurs,  $(\Pi^{[x]})_{q, k} = 1$ . Nous en déduisons

$$(\Pi^{[u]})_{\ell, k} = (\Pi^{[v]} \cdot \Pi^{[x]})_{\ell, k} = \sum_{1 \leq j \leq p} (\Pi^{[v]})_{\ell, j} (\Pi^{[x]})_{j, k} \geq (\Pi^{[v]})_{\ell, q} (\Pi^{[x]})_{q, k} = 1$$

Donc  $(\Pi^{[u]})_{\ell, k} = 1$ .

• Réciproquement, si cette égalité est vérifiée, c'est qu'il existe au moins un indice  $j$  tel que  $(\Pi^{[v]})_{\ell, j} (\Pi^{[x]})_{j, k} = 1$ , soit  $(\Pi^{[v]})_{\ell, j} = (\Pi^{[x]})_{j, k} = 1$ . Donc  $v$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  menant de  $\ell$  à  $j$ , et  $x$  est l'étiquette d'une transition menant de  $j$  à  $k$ ; par suite,  $u = vx$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  menant de  $\ell$  à  $k$ .

**Question 4** • Supposons  $u \in \Sigma^*$  reconnu par  $\mathcal{A}$ :  $u$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  menant d'un état initial  $i$  à un état final  $f$ . Du coup,  $(\Pi^{[u]})_{i, f} = 1$ ; donc  $(\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_i = \sum_{1 \leq j \leq p} (\Pi^{[u]})_{i, k} \mathbf{F}_j \geq (\Pi^{[u]})_{i, f} \mathbf{F}_f = 1$ ;

$$\text{puis } \mathbf{I}^T \cdot \Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F} = \sum_{1 \leq j \leq p} \mathbf{I}_j \times (\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_j \geq \mathbf{I}_i \times (\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_i = 1.$$

• Réciproquement, supposons  $\mathbf{I}^T \cdot \Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F} = 1$ . D'après le calcul précédent, il existe au moins un indice  $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\mathbf{I}_\ell \times (\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_\ell = 1$ , soit  $\mathbf{I}_\ell = 1$  et  $(\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_\ell = 1$ . La première condition fait que  $\ell$  est un état initial. En exploitant toujours le calcul précédent, la deuxième nous dit qu'il existe un indice  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $(\Pi^{[u]})_{\ell, k} \mathbf{F}_k = 1$ , soit  $(\Pi^{[u]})_{\ell, k} = 1$  et  $\mathbf{F}_k = 1$ . D'après la question 3, la première condition nous dit que  $u$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  menant d'un état initial  $\ell$  à l'état  $k$ , la deuxième que  $k$  est final. Conclusion:  $u \in \Sigma^*$  est reconnu par  $\mathcal{A}$ .

#### Applications de l'approche matricielle

**Question 5** •  $|Q| = n$ , donc  $|\mathcal{M}_p(\mathcal{B})| = 2^{p^2}$  et finalement  $|Q'| = |Q \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B})| = |Q| \cdot |\mathcal{M}_p(\mathcal{B})| = p \cdot 2^{p^2}$ .

**Question 6** • Soient  $q \in Q$ ,  $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_p(\mathcal{B})$  et  $x \in \Sigma$ . Il existe une transition et une seule de  $\mathcal{A}$  partant de  $q$  et étiquetée par  $x$ ; il existe donc une transition et une seule partant de  $(q, \mathbf{M})$  et étiquetée par  $x$ : elle mène à l'état  $(\delta(q, x), \mathbf{M} \cdot \Pi^{[x]})$ .  $\mathcal{A}'$  n'a qu'un seul état initial, à savoir  $i'$ ; donc cet automate est déterministe et complet.

**Question 7** • Procédons par récurrence sur  $n = |u|$ . Pour  $u = \varepsilon$ , nous avons  $\delta'^*((q, \mathbf{M}), u) = (q, \mathbf{M})$ , donc  $\delta(q, u) = u$  et  $\mathbf{M} \cdot \Pi^{[u]} = \mathbf{M}$ : ce qui établit l'égalité au rang  $n = 0$ .

• Supposons l'égalité acquise lorsque  $|u| = n$ . Soit  $u \in \Sigma^{n+1}$ ; soient  $v \in \Sigma^n$  et  $x \in \Sigma$  définis par  $u = vx$ . Alors  $\delta'^*((q, \mathbf{M}), v) = (q', \mathbf{M}')$  où  $q' = \delta(q, v)$  et  $\mathbf{M}' = \mathbf{M} \cdot \Pi^{[v]}$ ; donc :

$$\delta'^*((q, \mathbf{M}), u) = \delta'^*((q, \mathbf{M}), vx) = \delta'(\delta'^*((q, \mathbf{M}), v), x) = \delta'((q', \mathbf{M}'), x) = (\delta(q', x), \mathbf{M}' \cdot \Pi^{[x]})$$

Mais  $\delta(q', x) = \delta(\delta^*(q, v), x) = \delta^*(q, vx) = \delta^*(q, u)$ ; et  $\mathbf{M}' \cdot \Pi^{[x]} = \mathbf{M} \cdot \Pi^{[v]} \cdot \Pi^{[x]} = \mathbf{M} \cdot \Pi^{[vx]} = \mathbf{M} \cdot \Pi^{[u]}$ . Donc  $\delta'^*((q, \mathbf{M}), u) = (\delta^*(q, u), \mathbf{M} \cdot \Pi^{[u]})$  ce qui établit l'égalité au rang  $n + 1$ .

**Question 8** • Soit  $u \in \sqrt{L}$ :  $uu \in L$ . Donc  $uu$  est l'étiquette d'un calcul réussi de  $\mathcal{A}$ ; notons  $q = \delta^*(i, u)$  et  $f = \delta^*(q, u)$ , ainsi  $f \in F$ . Faisons lire le mot  $u$  à l'automate  $\mathcal{A}'$  placé dans son état initial. Comme  $\mathcal{A}'$  est déterministe et complet, ce calcul se termine dans l'état  $(q, \Pi^{[u]})$ , dont il suffit de montrer qu'il est final; or, comme  $u$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  menant de  $q$  à  $f$ , nous pouvons affirmer que  $(\Pi^{[u]})_{q,f} = 1$ , donc  $\sum_{1 \leq k \leq p} (\Pi^{[u]})_{q,k} \mathbf{F}_k = 1$  puis  $(\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_q = 1$  ce qui montre que  $(q, \Pi^{[u]})$  est final.

• Soit maintenant  $u$  reconnu par  $\mathcal{A}'$ .  $u$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}'$  commençant en  $(i, \mathbf{Id})$  et finissant dans un état  $(q, \Pi^{[u]}) \in F'$ . Mais ceci implique  $(\Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F})_q = 1$ , donc il existe un état final  $f$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $(\Pi^{[u]})_{q,f} = 1$ : ceci revient à dire que  $u$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  menant de  $q$  à  $f$ . Par ailleurs,  $u$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  menant de  $i$  à  $q$ . Donc  $uu$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  menant de  $i$  à  $f \in F$ , ce qui prouve que  $uu$  est reconnu par  $\mathcal{A}$ , si bien que  $uu \in L$  et finalement  $u \in \sqrt{L}$ .

## Fonctions conservant la rationalité

**Question 9** • Remarquons que  $\mathcal{A}'$  est déterministe et complet, pour les mêmes raisons que celles invoquées à la question 6.

• Soit  $u \in \mathcal{T}(L, \text{id})$ . Il existe donc un mot  $v$  vérifiant  $|v| = |u|$ , et tel que  $uv$  appartienne à  $L$ . Par suite, il existe un calcul réussi de  $\mathcal{A}$ , d'étiquette  $uv$ . Notons alors  $q = \delta(i, u)$ ,  $\mathbf{M} = \Delta^{|u|}$  et  $f = \delta^*(i, uv) = \delta^*(q, v)$ ; nous aurons  $\delta'^*(i', u) = (q, \mathbf{M})$ : la preuve de cette égalité est très semblable à celle de l'égalité établie à la question 7, et ne sera donc pas détaillée ici.  $v$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  qui commence en  $q$  et se termine en  $f$ ; donc  $\mathbf{M}_{q,f} = 1$ , et par suite  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$  ce qui montre que  $(q, \mathbf{M})$  est un état final de  $\mathcal{A}'$ . Résumons:  $u$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}'$  qui commence en  $i'$  et se termine en  $(q, \mathbf{M}) \in F'$ : donc  $u$  est reconnu par  $\mathcal{A}'$ .

• Réciproquement, soit  $u$  un mot reconnu par  $\mathcal{A}'$ :  $u$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}'$  qui commence en  $i'$  et se termine dans un état final  $(q, \mathbf{M})$  de  $\mathcal{A}'$ . Mais alors  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$ , donc il existe au moins un calcul de  $\mathcal{A}$ , de longueur  $|u|$ , commençant en  $q$  et se terminant dans un état final  $f$  de  $\mathcal{A}$ ; notons  $v$  l'étiquette d'un tel calcul. Alors  $uv$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  commençant en  $i$  et finissant en  $f$ : donc  $uv$  est reconnu par  $\mathcal{A}$ , ou encore  $uv \in L$ ; mais  $|v| = |u|$ , si bien que  $u \in \mathcal{T}(L, \text{id})$ .

**Question 10** • En nous inspirant de l'exemple précédent, nous allons construire un automate fini déterministe complet  $\hat{\mathcal{A}} = (\hat{Q}, \hat{\delta}, \hat{i}, \hat{F})$  qui reconnaît  $\mathcal{T}(L, g)$ . Définissons :

- $\hat{Q} = Q \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B})$ ;
- $\hat{\delta}((q, \mathbf{M}), x) = (\delta(q, x), \mathbf{M}^2)$ ;
- $\hat{i} = (i, \Delta)$ ;
- $\hat{F}$  est l'ensemble des couples  $(q, \mathbf{M})$  tels que  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$ .

Une récurrence immédiate montre que  $\hat{\delta}^*(\hat{i}, u) = (\delta(i, u), \Delta^{2^{|u|}})$ .

• Soit  $u \in \mathcal{T}(L, g)$ . Il existe donc un mot  $v$  vérifiant  $|v| = g(|u|)$ , soit  $|v| = 2^{|u|}$ , et tel que  $uv$  appartienne à  $L$ . Par suite, il existe un calcul réussi de  $\mathcal{A}$ , d'étiquette  $uv$ . Notons alors  $q = \delta(i, u)$ ,  $\mathbf{M} = \Delta^{2^{|u|}}$  et

$f = \delta^*(i, uv) = \delta^*(q, v)$ . Nous aurons  $\widehat{\delta}^*(i', u) = (q, \mathbf{M})$ .  $v$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  de longueur  $2^{|u|}$ , qui commence en  $q$  et se termine en  $f$ ; donc  $\mathbf{M}_{q,f} = 1$ , et par suite  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$  ce qui montre que  $(q, \mathbf{M})$  est un état final de  $\widehat{\mathcal{A}}$ . Résumons:  $u$  est l'étiquette d'un calcul de  $\widehat{\mathcal{A}}$  qui commence en  $\widehat{i}$  et se termine en  $(q, \mathbf{M}) \in \widehat{F}$ :  $u$  est reconnu par  $\widehat{\mathcal{A}}$ .

• Réciproquement, soit  $u$  un mot reconnu par  $\widehat{\mathcal{A}}$ :  $u$  est l'étiquette d'un calcul de  $\widehat{\mathcal{A}}$  qui commence en  $\widehat{i}$  et se termine dans un état final de  $\widehat{\mathcal{A}}$ , que nous noterons  $(q, \mathbf{M})$  avec  $q = \delta(i, u)$  et  $\mathbf{M} = \Delta^{2^{|u|}}$ . Mais alors  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$ , donc il existe au moins un calcul de  $\mathcal{A}$ , de longueur  $2^{|u|}$ , commençant en  $q$  et se terminant dans un état final  $f$  de  $\mathcal{A}$ ; notons  $v$  l'étiquette d'un tel calcul. Alors  $uv$  est l'étiquette d'un calcul de  $\mathcal{A}$  commençant en  $i$  et finissant en  $f$ : donc  $uv$  est reconnu par  $\mathcal{A}$ , ou encore  $uv \in L$ ; mais  $|v| = 2^{|u|} = g(|u|)$ , si bien que  $u \in \mathcal{T}(L, g)$ .

**Question 11** • La construction est un peu plus compliquée: nous partons de la relation  $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ . Si l'automate  $\mathcal{A} = (Q, \delta, I, F)$  reconnaît  $L$ , alors l'automate  $\widetilde{\mathcal{A}} = (\widetilde{Q}, \widetilde{\delta}, \widetilde{i}, \widetilde{F})$  décrit ci-dessous reconnaît  $\mathcal{T}(L, h)$ :

- $\widetilde{Q} = Q \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B}) \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B})$ ;
- $\widetilde{\delta}((q, \mathbf{M}, \mathbf{P}), x) = (\delta(q, x), \mathbf{M} \cdot \Delta, \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} \cdot \Delta)$ ;
- $\widetilde{i} = (i, \mathbf{Id}, \mathbf{Id})$ ;
- $\widetilde{F}$  est l'ensemble des triplets  $(q, \mathbf{M}, \mathbf{P})$  tels que  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{F})_q = 1$ .

La justification repose sur la remarque suivante:  $\widetilde{\delta}^*(\widetilde{i}, u) = (\delta(q, u), \Delta^{|u|}, \Delta^{|u|^2})$ .

**Question 12** • La construction est très semblable à la précédente; nous prenons cette fois:

- $\overline{Q} = Q \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B}) \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B})$ ;
- $\overline{\delta}((q, \mathbf{M}, \mathbf{P}), x) = (\delta(q, x), \mathbf{P}, \mathbf{M} \cdot \mathbf{P})$ ;
- $\overline{i} = (i, \mathbf{Id}, \Delta)$ ;
- $\overline{F}$  est l'ensemble des triplets  $(q, \mathbf{M}, \mathbf{P})$  tels que  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$ .

La justification repose sur la remarque suivante:  $\overline{\delta}^*(\overline{i}, u) = (\delta(q, u), \Delta^{|u|}, \Delta^{|u|+1})$ .

**FIN**