Option Informatique en Spé MP et MP*
L'approche matricielle de la théorie des automates
Devoir à rendre après les vacances de Noël

Résumé

On présente l'approche matricielle de la théorie des automates, telle qu'elle a été exposée par Guo-Qiang Zhang. On montre l'utilité de cette approche, pour résoudre des exercices classiques liés à la notion de *fonction conservant la rationalité*.

► *Vous pouvez au besoin admettre tout ou partie des résultats de cette partie, à condition de le signaler clairement sur votre copie.*

► Σ désigne un alphabet quelconque.

1 Lien entre automates et matrices

► Notons $\mathcal{B} = \{0{,}1\}$. L'ensemble $\mathcal{B}$ est muni des lois $+$ et $\cdot$ définies comme suit : $0+0 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1+1 = 1$, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ et $1 \cdot 1 = 1$. Vous noterez que $x + y = \max(x, y)$ et $x \cdot y = \min(x, y)$.

► Soit Σ un alphabet fini. Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, I, F)$ un automate fini non déterministe : δ est donc une partie finie de $Q \times \Sigma \times Q$, tandis que I et F sont des parties de Q. Les notions de calcul, étiquette d'un calcul, calcul réussi, langage reconnu par $\mathcal{A}$ sont censées être connues de vous. On rappelle que, par convention, il existe pour tout état q un calcul de longueur 0, menant de q à q ; l'étiquette de ce calcul est ε.

► Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $Q = [\![1, p]\!]$, où $p = |Q|$. À l'automate $\mathcal{A}$, nous associerons :

1. la matrice Δ carrée d'ordre p, à coefficients dans $\mathcal{B}$, définie comme suit : $\Delta_{\ell,k} = 1$ ssi il existe une transition de $\mathcal{A}$ menant de l'état ℓ à l'état k ;
2. les vecteurs $\mathbf{I}$ et $\mathbf{F}$ de $\mathcal{B}^p$ définis comme suit : $\mathbf{I}_q = 1$ ssi $q \in I$; $\mathbf{F}_q = 1$ ssi $q \in F$.

$\mathbf{I}$ et $\mathbf{F}$ s'identifient à des matrices à p lignes et une colonne ; $\mathbf{I}^\mathsf{T}$ est le transposé de $\mathbf{I}$. Par exemple, avec l'automate de Fibonacci, représenté figure 1, nous aurons $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{I} = \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

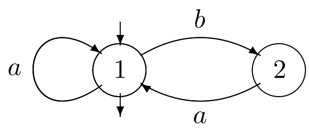

Figure 1: l'automate de Fibonacci

► Nous noterons $\mathbf{Id}$ la matrice identité d'ordre p : si $\ell = k$, alors $\mathbf{Id}_{\ell,k} = 1$, sinon $\mathbf{Id}_{\ell,k} = 0$.

Question 1 • Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que $(\Delta^n)_{\ell,k} = 1$ ssi il existe un calcul de $\mathcal{A}$, de longueur n, menant de l'état ℓ à l'état k.

► Soit $x \in \Sigma$. Nous noterons $\Pi^{[x]}$ la matrice carrée d'ordre p, à coefficients dans $\mathcal{B}$, définie comme suit : $(\Pi^{[x]})_{\ell,k} = 1$ ssi il existe une transition de $\mathcal{A}$ étiquetée par x et menant de l'état ℓ à l'état k. Par exemple, avec l'automate de Fibonacci, représenté figure 1, nous aurons $\Pi^{[a]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Pi^{[b]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 2 • Justifiez la relation $\Delta = \displaystyle\sum_{x \in \Sigma} \Pi^{[x]}$, la somme étant calculée dans $\mathcal{B}$.

► Π est une application de Σ dans $\mathcal{M}_p(\mathcal{B})$. Elle se prolonge naturellement en un morphisme de Σ^* dans $\mathcal{M}_p(\mathcal{B})$: $\Pi^{[\varepsilon]} = \mathbf{Id}$; et, si $u = u_1 u_2 \dots u_n$ est un mot de longueur $n \geqslant 2$, alors $\Pi^{[u]} = \Pi^{[u_1]} \Pi^{[u_2]} \dots \Pi^{[u_n]}$.

Question 3 • Montrez que $(\Pi^{[u]})_{\ell,k} = 1$ ssi il existe un calcul de $\mathcal{A}$ étiqueté par u et menant de l'état ℓ à l'état k.

Question 4 • Montrez que $u \in \Sigma^*$ est reconnu par $\mathcal{A}$ ssi $\mathbf{I}^\mathsf{T} \cdot \Pi^{[u]} \cdot \mathbf{F} = 1$.

2 Une application de l'approche matricielle

▶ Soit L un langage sur l'alphabet Σ. Notons $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* \mid uu \in L\}$. Nous nous proposons de montrer que si L est rationnel, alors $\sqrt{L}$ est lui aussi rationnel. Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini déterministe complet reconnaissant L. Notons $p = |Q|$.

▶ Définissons l'automate $\mathcal{A}' = (Q', \delta', i', F')$ où :

- $Q' = Q \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B})$: un état de $\mathcal{A}'$ est donc un couple formé d'un état de $\mathcal{A}$ et d'une matrice carrée d'ordre p, à coefficients dans $\mathcal{B}$;
- $\delta'\big((q, \mathbf{M}), x\big) = \big(\delta(q, x), \mathbf{M} \cdot \Pi^{[x]}\big)$;
- $i' = (i, \mathbf{Id})$;
- F' est l'ensemble des couples $(q, \mathbf{M})$ tels que $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$.

Question 5 • Quel est le nombre d'états de $\mathcal{A}'$?

Question 6 • Montrez que $\mathcal{A}'$ est déterministe et complet.

Question 7 • Soient $(q, \mathbf{M})$ un état de $\mathcal{A}'$ et $u \in \Sigma^*$. Prouvez l'égalité $\delta'^*\big((q, \mathbf{M}), u\big) = \big(\delta(q, u), \mathbf{M} \cdot \Pi^{[u]}\big)$.

Question 8 • Montrez que $\mathcal{A}'$ reconnaît $\sqrt{L}$.

3 Fonctions conservant la rationalité

▶ Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans lui-même. À tout langage L, associons l'ensemble $\mathcal{T}(L, f)$ des mots u tels qu'il existe un mot v vérifiant $|v| = f\big(|u|\big)$ et $uv \in L$. Nous dirons de f qu'elle *conserve la rationalité* si $\mathcal{T}(L, f)$ est rationnel dès que L rationnel.

▶ Nous allons montrer que la fonction id : $n \mapsto n$ conserve la rationalité. Soient L un langage rationnel et $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini déterministe complet reconnaissant L. Notons toujours p le nombre d'états de $\mathcal{A}$. Définissons l'automate $\mathcal{A}' = (Q', \delta', i', F')$ où :

- $Q' = Q \times \mathcal{M}_p(\mathcal{B})$: un état de $\mathcal{A}'$ est donc un couple formé d'un état de $\mathcal{A}$ et d'une matrice carrée d'ordre p, à coefficients dans $\mathcal{B}$;
- $\delta'\big((q, \mathbf{M}), x\big) = \big(\delta(q, x), \mathbf{M} \cdot \Delta\big)$, où Δ est la matrice associée à $\mathcal{A}$ dans la partie 1 ;
- $i' = (i, \mathbf{Id})$;
- F' est l'ensemble des couples $(q, \mathbf{M})$ tels que $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{F})_q = 1$.

Question 9 • Montrez que $\mathcal{A}'$ reconnaît $\mathcal{T}(L, \mathrm{id})$.

Question 10 • Montrez que la fonction $g : n \mapsto 2^n$ conserve la rationalité.

Question 11 • Montrez que la fonction $h : n \mapsto n^2$ conserve la rationalité.

Question 12 • F_n désigne le n-ième terme de la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$. Montrez que la fonction $n \mapsto F_n$ conserve la rationalité.

FIN