Option Informatique en Spé MP et MP*
DS du 11 décembre 2001 : le corrigé

Un morphisme alternant

Question 1 • La partie de $K_1 \cap 1\Sigma^*$ formée des mots contenant un nombre impair de blocs est décrite par l'expression rationnelle $(1+11)\big((2+22)(1+11)\big)^*$. En autorisant un bloc de un ou deux 2 après le dernier bloc de 1, on obtient l'expression rationnelle $(1+11)\big((2+22)(1+11)\big)^*(\varepsilon+2+22)$ qui décrit $K_1 \cap 1\Sigma^*$. Pour obtenir une expression rationnelle de K_1, on ajoute l'expression de $K_1 \cap 2\Sigma^*$ déduite par symétrie :

$$(1+11)\big((2+22)(1+11)\big)^*(\varepsilon+2+22)+(2+22)\big((1+11)(2+22)\big)^*(\varepsilon+1+11)$$

Question 2 • L'automate fini ci-dessous est déterministe complet et reconnaît K_1 :

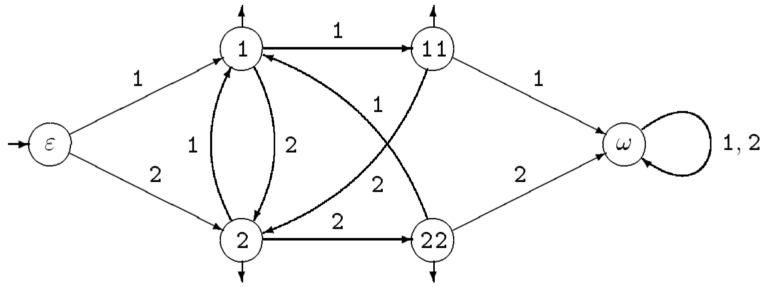

Figure 1: automate reconaissant K_1

La justification repose sur la remarque suivante : tant que l'on n'a pas lu l'un des blocs «interdits» 111 ou 222, l'état dans lequel on se trouve après lecture d'un mot u est le dernier bloc lu. La lecture d'un des blocs interdits mène irrémédiablement dans l'état-puits ω.

Question 3 • La preuve la plus courte consiste à remarquer que le complémentaire de K_1 est le langage $\Sigma^*\{111,222\}\Sigma^*$, lequel est manifestement rationnel.

Question 4 • On élimine d'abord les cas où la longueur du mot est inférieure à 3. Ensuite, on distingue trois situations selon que la longueur du premier bloc est au moins égale à 3, égale à 2 ou égale à 1. Le cas «anormal» a été placé à la fin.

```
let rec sterile = function
 | [_] | [_;_] -> false
 | U::U::U::_ | D::D::D::_ -> true
 | U::U::q -> sterile q
 | D::D::q -> sterile q
 | U::q -> sterile q
 | D::q -> sterile q
 | [] -> failwith "mot vide!" ;;
```

Question 5 • Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = (12)^n 11 (21)^n$. Il est clair que $u_n \in K_1$: on peut même affirmer que $\Phi(u_n) = 1^{2n}21^{2n}$. Notons $L = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$: $L \subset K_1$. Supposons L rationnel : le lemme de l'étoile affirme l'existence d'un entier N tel que tout mot v de L de longueur au moins égale à N se décompose en xyz, avec $|xy| \leqslant N$, $y \neq \varepsilon$ et $xy^kz \in L$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Choisissons alors $v = u_N$: comme $|v| = 4N+1$, on a clairement $|v| \geqslant N$. Observons que xy est de longueur N au plus, et est préfixe de v ; donc xy est préfixe de $(12)^N$. Notons t le mot tel que $xyt = (12)^N$, ainsi $v = xyt11(21)^N$ et $z = t11(21)^N$. Alors $xz = xt11(21)^N$ avec $|xt| < 2N$; ce mot n'est pas dans L, ce qui contredit la conclusion du lemme de l'étoile.

Question 6 • La CNS demandée s'énonce ainsi : $\Phi(uv) = \Phi(u)\Phi(v)$ ssi la dernière lettre de u est différente de la première lettre de v. Nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que la dernière lettre de u est 1 : la décomposition en blocs de u s'écrit $x^{e_1}\overline{x}^{e_2}\dots 1^{e_k}$ où les e_i sont dans $\{1,2\}$. Si $v \in 2\Sigma^*$, alors la décomposition en blocs de v s'écrit $2^{f_1}1^{f_2}\dots y_\ell^{f_\ell}$, où les f_i sont dans $\{1,2\}$. Dans ce cas, il est clair que la décomposition en blocs de uv est $x^{e_1}\overline{x}^{e_2}\dots 1^{e_k}2^{f_1}1^{f_2}\dots y_\ell^{f_\ell}$ si bien que $\Phi(uv) = \Phi(u)\Phi(v)$. Si $v \in 1\Sigma^*$, alors la décomposition en blocs de v s'écrit $1^{f_1}2^{f_2}\dots y_\ell^{f_\ell}$, où les f_i sont dans $\{1,2\}$. Cette fois, la décomposition en blocs de uv est $x^{e_1}\overline{x}^{e_2}\dots 1^{e_k+f_1}2^{f_2}\dots y_\ell^{f_\ell}$ et manifestement $\Phi(uv) \neq \Phi(u)\Phi(v)$.

Question 7 • La rédaction de `fils` reprend la structure de la fonction `sterile` proposée à la question 4.

```
let rec fils = function
 | [U] | [D] -> [U]
 | [U;U] | [D;D] -> [D]
 | U::U::U::_ | D::D::D::_ -> failwith "mot stérile !"
 | U::U::q -> D::(fils q)
 | D::D::q -> D::(fils q)
 | D::q -> U::(fils q)
 | U::q -> U::(fils q)
 | [] -> failwith "mot vide!" ;;
```

Question 8 • Soit $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ la liste des longueurs des blocs dans la décomposition de u. Alors u est le fils des deux mots $v = \mathtt{1}^{e_1}\mathtt{2}^{e_2}\mathtt{1}^{e_3}\dots$ et $w = \mathtt{2}^{e_1}\mathtt{1}^{e_2}\mathtt{2}^{e_3}\dots$; on peut remarquer que $w = \overline{v}$.

Question 9 • La justification du programme repose sur les remarques suivantes : $\pi(\mathtt{1}) = \mathtt{1}$, $\pi(\mathtt{2}) = \mathtt{11}$, $\mu(\mathtt{1}) = \mathtt{2}$ et $\mu(\mathtt{2}) = \mathtt{22}$; si $x \in \Sigma$ et $v \in \Sigma^+$, alors $\pi(xv) = \mathtt{1}^x\mu(v)$ et $\mu(xv) = \mathtt{2}^x\pi(v)$

```
let rec pere = function
 | [U] -> [U]
 | [D] -> [U;U]
 | U::v -> U::(mere v)
 | D::v -> U::U::(mere v)
 |  []  -> failwith "mot vide!"
and mere = function
 | [U] -> [D]
 | [D] -> [D;D]
 | U::v -> D::(pere v)
 | D::v -> D::D::(pere v)
 |  []  -> failwith "mot vide!" ;;

let parents u = (pere u,mere u) ;;
```

Question 10 • Ce type évite le recours direct au type `int` de Caml : on ne risque donc pas de voir se glisser des 3 ou des -7 dans un mot.

Question 11 • Notons que $Q_1 = |K_1 \cap \Sigma| = |\Sigma| = 2$ et $Q_2 = |K_1 \cap \Sigma^2| = |\Sigma^2| = 4$. Soit $n \geqslant 1$. Effectuons une partition de $K_1 \cap \Sigma^{n+2}$ en deux sous-ensembles A_n et B_n selon la longueur d du premier bloc :

- $A_n = K_1 \cap \{\mathtt{12},\mathtt{21}\}^*$ est l'ensemble des mots de $K_1 \cap \Sigma^{n+2}$ dont la longueur du premier bloc est 1 ; la fonction $u_1u_2\dots u_{n+2} \mapsto u_2\dots u_{n+2}$ réalise clairement une bijection de A_n sur $K_1 \cap \Sigma^{n+1}$;
- $B_n = K_1 \cap \{\mathtt{11},\mathtt{22}\}^*$ est l'ensemble des mots de $K_1 \cap \Sigma^{n+2}$ dont la longueur du premier bloc est 2 ; la fonction $u_1u_2\dots u_{n+2} \mapsto u_3\dots u_{n+2}$ réalise clairement une bijection de B_n sur $K_1 \cap \Sigma^n$.

On en déduit :

$$Q_{n+2} = |K_1 \cap \Sigma^{n+2}| = |K_1 \cap \{\mathtt{12},\mathtt{21}\}^*| + |K_1 \cap \{\mathtt{11},\mathtt{22}\}^*| = |K_1 \cap \Sigma^{n+1}| + |K_1 \cap \Sigma^n| = Q_{n+1} + Q_n$$

La suite $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci ; de plus, $Q_1 = 2 = 2F_2$ et $Q_3 = 4 = 2F_3$. Donc $\boxed{Q_n = 2F_{n+1}}$.

Question 12 • La longueur de $\Phi(u)$ est égale au nombre de blocs de u ; la longueur de chaque bloc de u est au moins égale à 1, et la somme des longueurs de ces blocs est la longueur de u. Donc $|\Phi(u)| \leqslant |u|$.

• On a $|\Phi(u)| = |u|$ ssi les blocs de u sont tous de longueur 1, ce qui revient à dire que u est 2-périodique.

Question 13 • Si u contient au moins un bloc de longueur 2, alors $|\Phi(u)| < |u|$ et à plus forte raison $|\Phi^2(u)| < |u|$. Si u contient p blocs de longueur 1, alors $\Phi(u) = \mathtt{1}^p$ où $p = |u|$. Si $p \geqslant 3$, $\Phi(u)$ est stérile ; sinon, $p = 2$ donc $\Phi(u) = \mathtt{11}$ et $\Phi^2(u) = \mathtt{2}$: ici encore, $|\Phi^2(u)| < |u|$.

Question 14 • Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini reconnaissant L. Alors $\Phi^{-1}(L)$ est reconnu par l'automate $\mathcal{A}' = (Q', \delta', I', F')$ défini comme suit : $Q' = (Q \cup Q^2) \times \{\mathtt{1},\mathtt{2}\}$; les état initiaux sont $(i, \mathtt{1})$ et $(i, \mathtt{2})$; $F' = F \times \{\mathtt{1},\mathtt{2}\}$; enfin, δ' est composé des transitions suivantes :

- les transitions $(q, \mathtt{1}) \xrightarrow{\mathtt{1}} (q', \mathtt{2})$ et $(q, \mathtt{2}) \xrightarrow{\mathtt{2}} (q', \mathtt{1})$ pour chaque transition $(q, \mathtt{1}, q')$ de $\mathcal{A}$;

- les transitions $(q,1)\xrightarrow{1}(qq',1)$, $(qq',1)\xrightarrow{1}(q',2)$, $(q,2)\xrightarrow{2}(qq',2)$ et $(qq',2)\xrightarrow{2}(q',1)$ pour chaque transition $(q,2,q')$ de $\mathcal{A}$.

La deuxième composante de chaque état indique le composant (1 ou 2) du bloc en cours de lecture. Nous avons noté qq' au lieu de (q,q') pour alléger les écritures.

Question 15 • Soit $\mathcal{A}=(Q,\delta,i,F)$ un automate fini reconnaissant L. Alors $\Phi(L)$ est reconnu par l'automate $\mathcal{A}'=(Q',\delta',I',F')$ défini comme suit : $Q'=Q\times\{1{,}2\}$; les états initiaux sont $(i,1)$ et $(i,2)$; $F'=F\times\{1{,}2\}$; enfin, δ' est composé des transitions suivantes :

- $(q,1)\xrightarrow{1}(q',2)$ pour chaque transition $(q,1,q')$ de $\mathcal{A}$;
- $(q,2)\xrightarrow{1}(q',1)$ pour chaque transition $(q,2,q')$ de $\mathcal{A}$;
- $(q,1)\xrightarrow{2}(q'',2)$ pour chaque couple de transitions $(q,1,q')$ et $(q',1,q'')$ de $\mathcal{A}$;
- $(q,2)\xrightarrow{2}(q'',1)$ pour chaque couple de transitions $(q,2,q')$ et $(q',2,q'')$ de $\mathcal{A}$.

La deuxième composante de chaque état indique le composant (1 ou 2) du bloc dont on simule la lecture par $\mathcal{A}$.

Itération de Φ

Question 16 • S'il existe un exposant n tel que $\Phi^n(u)$ soit stérile, alors la descendance de u se réduit aux mots $\Phi^k(u)$, $k\in[\![1,n]\!]$: elle est donc finie. Sinon, les exposants k tels que $|\Phi^{2k}(u)|>1$ sont en nombre fini, puisqu'ils doivent vérifier $0<|\Phi^{2k}(u)|<|u|-k$. Soit alors n tel que $|\Phi^{2n}(u)|=1$: on aura $\Phi^{2n+1}(u)=1$ et par suite la descendance de u se réduit aux mots $\Phi^k(u)$, où $k\in[\![1,2n+1]\!]$: dans ce cas aussi, elle est donc finie.

Question 17 • Il suffit de remarquer que $\Sigma^*\setminus\widehat{M}=\Sigma^*\cdot M\cdot\Sigma^*$.

Question 18 • Notons $W_1=\{111{,}222\}$ et $W_{n+1}=\Phi^{-1}(W_n)$ pour $n\geqslant 1$. Remarquons que $W_1\subset\Sigma^+\setminus K_1$ et $W_{n+1}\subset(K_n\setminus K_{n+1})$, si bien que les ensembles W_n sont deux à deux disjoints. On a clairement $|W_n|=2^n$. Notons $M_n=\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} W_k$; cette notation est cohérente avec la définition de M_1 donnée par l'énoncé. On a $|M_n|=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}2^k=2^{n+1}-2$. Nous allons montrer que $K_{n+1}=\widehat{M_{n+1}}$, ce qui terminera la preuve puisque $K_1=\widehat{M_1}$. Il suffit de remarquer qu'un mot u est dans $K_n\setminus K_{n+1}$ ssi $\Phi^n(u)$ est défini, mais pas $\Phi^{n+1}(u)$; ce qui revient à dire que l'un au moins des mots 111 et 222 est facteur de $\Phi^n(u)$, soit encore $\Phi^n(u)\in M_1$ ou enfin $u\in\widehat{M_{n+1}}$.

Question 19 • Pour le sens direct : le résultat de la question 13 montre que la suite de terme général $|\Phi^n(u)|$ est stationnaire, la valeur constante étant 1. Mais alors $|\Phi^n(u)|=1$ implique $\Phi^{n+1}(u)=1$. La réciproque est claire, puisque $1\in\mathbb{K}$.

Question 20 • Il suffit de remarquer que $2\in\mathbb{K}$; donc $\mu^n(2)\in\mathbb{K}$ quel que soit l'exposant $n\in\mathbb{N}$. Comme $|\mu(u)|>|u|$ quel que soit le mot $u\in 2\Sigma^*$, les $\mu^n(2)$ sont distincts ; donc $\mathbb{K}$ est infini.

Question 21 • $\sim$ est clairement réflexive et symétrique. Pour la transitivité, soient u, v et w tels que $u\sim v$ et $v\sim w$. Il existe des exposants p et q tels que $\Phi^p(u)=\Phi^q(v)$, et des exposants r et s tels $\Phi^r(v)=\Phi^s(w)$. Alors $\Phi^{p+r}(u)=\Phi^r(\Phi^p(u))=\Phi^r(\Phi^q(v))=\Phi^{r+q}(v)=\Phi^q(\Phi^r(v))=\Phi^q(\Phi^s(w))=\Phi^{q+s}(w)$, ce qui établit $u\sim w$.

Question 22 • $\mathbb{K}$ est la classe de 1 modulo $\sim$.

Question 23 • L'argument proposé à la question 20 peut être repris sans modification pour montrer que chaque classe est infinie : il suffit de considérer la suite des $\Phi^n(u)$ où u est un représentant de la classe (autre que 1, mais on vient de régler ce cas).

Question 24 • Nous allons montrer qu'un mot $y\in\Sigma^+$ ne peut pas être facteur itérant vis-à-vis de $\mathbb{K}$. Alors, avec la remarque de l'énoncé, on pourra affirmer que $\mathbb{K}$ n'est pas rationnel. Raisonnons par récurrence sur $|y|$.

• Remarquons qu'un mot ayant 111 ou 222 comme facteur n'est pas dans K_1, et à plus forte raison n'est pas dans $\mathbb{K}$. De même, un mot ayant 12121 ou 21212 comme facteur n'est pas dans K_2, et à plus forte raison n'est pas dans $\mathbb{K}$. Nous en déduisons qu'aucun des six mots 1, 2, 2, 11, 22, 12 et 21 ne peut être facteur itérant vis-à-vis de $\mathbb{K}$; ceci règle donc les cas $|y|=1$ et $|y|=2$.

• Supposons qu'aucun mot y de $\mathbb{K}$, de longueur au plus $n\geqslant 2$ ne soit facteur itérant vis-à-vis de $\mathbb{K}$. Soit $y\in\Sigma^{n+1}$; on ne restreint pas la généralité en supposant $y\in 1\Sigma^n$. Distinguons deux situations, selon que y se termine par 1 ou par 2.

• Si $y \in \mathtt{1}\Sigma^*\mathtt{1}$, alors $y = \mathtt{1}v\mathtt{1}$ avec $v \neq \varepsilon$ puisque $|y| \geqslant 3$. Si $v \in \mathtt{1}\Sigma^*$, alors $y = \mathtt{11}w\mathtt{1}$ donc $y^2 = \mathtt{11}w\mathtt{111}w\mathtt{1}$; de même, si $v \in \Sigma^*\mathtt{1}$, alors $y = \mathtt{1}w\mathtt{11}$ donc $y^2 = \mathtt{1}w\mathtt{111}w\mathtt{11}$; dans les deux cas, on constate que y ne peut pas être facteur itérant vis-à-vis de $\mathbb{K}$. Ainsi $v \in \mathtt{2}\Sigma^*\mathtt{2}$, puis $y = \mathtt{12}w\mathtt{21}$. Alors $xy^{k+1}z = x(\mathtt{12}w\mathtt{21})^{k+1}z = x\mathtt{12}w\mathtt{2}(\mathtt{112}w\mathtt{2})^k\mathtt{1}z$; en utilisant la CNS établie à la question 6, on obtient :

$$\Phi(xy^{k+1}z) = \Phi(x\mathtt{12}w\mathtt{2})\Phi(\mathtt{112}w\mathtt{2})^k\Phi(\mathtt{1}z) = \Phi(x\mathtt{12}w\mathtt{2})\big(2\Phi(\mathtt{2}w\mathtt{2})\big)^k\Phi(\mathtt{1}z)$$

$2\Phi(w\mathtt{2})$ est de longueur n au plus ; de par l'hypothèse de récurrence, il ne peut être facteur itérant vis-à-vis de $\mathbb{K}$. Il en est donc de même de y

• Si $y \in \mathtt{1}\Sigma^*\mathtt{2}$: alors $y = \mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2}^\beta$ où α (resp. β) est la longueur du premier (resp. dernier) bloc dans la décomposition de y. Ainsi $\Phi(y) = \alpha\Phi(v)\beta$. Avec la CNS établie à la question 6, nous aurons :

$$\begin{aligned}
\Phi(xy^{k+2}z) &= \Phi\big(x(\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2}^\beta)^{k+2}z\big) = \Phi\big((x\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2})(\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2})^k(\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2}z)\big) = \Phi(x\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2})\big(\Phi(\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2})\big)^k\Phi(\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2}z) \\
&= \Phi(x\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2})\big(\alpha\Phi(v)\beta\big)^k\Phi(\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2}z) = \Phi(x\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2})\big(\Phi(y)\big)^k\Phi(\mathtt{1}^\alpha v\mathtt{2}z)
\end{aligned}$$

Si $v = (\mathtt{21})^\ell$, alors v (à plus forte raison y) n'est pas facteur itérant vis-à-vis de $\mathbb{K}$. Sinon, v contient un bloc de longueur 2 ; alors $|\Phi(y)| < |y|$ si bien que $\Phi(y)$ ne peut être facteur itérant vis-à-vis de $\mathbb{K}$. Il en est donc de même de y

Question 25 • $\mathbb{K}$ est stable par Φ. Si un mot u de $\mathbb{K}$ admettait un facteur itérant vis-à-vis de $\mathbb{K}$, il en serait de même de $\Phi^n(u)$ pour tout $n \geqslant 1$, d'après la question précédente. Or, pour n assez grand, $\Phi^n(u) = \mathtt{1}$, dont le seul facteur est $\mathtt{1}$, qui n'est pas un facteur itérant vis-à-vis de $\mathbb{K}$. Donc $\mathbb{K}$ n'est pas rationnel.

Question 26 La durée de vie du mot $u = 22112122122112112211211$ est 7 car $\Phi(u) = 22112122122112$, $\Phi^2(u) = 221121221$, $\Phi^3(u) = 221121$, $\Phi^4(u) = 2211$, $\Phi^5(u) = 22$, $\Phi^6(u) = 2$ et $\Phi^7(u) = 1$.

Question 27 • On utilise la définition récursive suivant : la durée de vie du mot $\mathtt{1}$ est 0 ; la durée de vie d'un mot u (non stérile) est la durée de vie de son fils, augmentée de 1.

```
let rec duree_de_vie = function
 | [] -> failwith "mot vide"
 | [U] -> 0
 | x when sterile x -> failwith "mot stérile"
 | _ -> 1 + duree_de_vie (fils x) ;;
```

Le mot de Kolakoski

Question 28 • Pour $n \geqslant 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion suivante : «si $|w| \in [\![1, n]\!]$, alors le mot infini ultimement périodique $u = vw^\omega$ est ultimement stérile». Montrons, par récurrence sur n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$. Nous pouvons supposer $w \in \mathtt{1}\Sigma^*$ sans perte de généralité.

• $\mathcal{P}(1)$ est vraie : si $w = \mathtt{1}$, alors u est stérile car il contient le facteur $\mathtt{111}$. $\mathcal{P}(2)$ est vraie : si $w = \mathtt{11}$, alors u est stérile ; et si $w = \mathtt{12}$ c'est $\Phi(u) = \Phi(vw^\omega) = \Phi(vw)\big(\Phi(w)\big)^\omega = \Phi(vw)(11)^\omega$ qui est stérile.

• Supposons le résultat acquis au rang $n \geqslant 2$. Soit $u = vw^\omega$ avec $|w| = n+1$. Si $w = \mathtt{111}x$, alors u est stérile. Si $w = \mathtt{11}x\mathtt{1}$, alors $u = vw^\omega = vwww^\omega = v\mathtt{11}x\mathtt{111}x\mathtt{1}w^\omega$ est stérile. Si $w = \mathtt{11}x\mathtt{2}$, alors $\Phi(u) = \Phi(vw^\omega) = \Phi(vww^\omega) = \Phi(vw)\big(\Phi(w)\big)^\omega$; w contient au moins un bloc de longueur 2, donc $|\Phi(w)| < |w|$: l'hypothèse de récurrence affirme que $\Phi(u)$ est ultimement stérile, et il en est donc de même pour u. Le raisonnement est analogue si $w = \mathtt{12}x\mathtt{1}$, en écrivant cette fois $\Phi(u) = \Phi(uw\mathtt{12})\big(\Phi(\mathtt{112}x)\big)^\omega$. Les deux cas $w = \mathtt{12}x\mathtt{12}$ et $\mathtt{12}x\mathtt{22}$ se traitent de la même manière. Seul a été oublié le cas $w = \mathtt{122}$, qui est banal puisque $\Phi\big(\Phi(\mathtt{122})\big)^\omega = (\mathtt{12})^\omega$.

Question 29 • Pour montrer l'existence et l'unicité de κ, expliquons comment le construire de proche en proche. $\kappa_1 = 2$, donc le premier bloc de κ est $\mathtt{22}$: $\kappa = \mathtt{22}\ldots$ Du coup, $\kappa_2 = 2$, donc le deuxième bloc de κ est $\mathtt{11}$: $\kappa = \mathtt{2211}\ldots$. Du coup, $\kappa_3 = 1$, donc le troisième bloc de κ est $\mathtt{2}$ et $\kappa = \mathtt{22112}\ldots$. Comme on a «pris de l'avance» à la première étape, et que chaque bloc mis en place coûte une lettre mais en rapporte au moins une, on ne sera jamais à court pour continuer la construction. Pour κ', on remarque que $\kappa'_1 = \mathtt{1}$, si bien que le premier bloc de κ' est $\mathtt{1}$, et le second bloc commence par $\mathtt{2}$: du coup, il est égal à $\mathtt{22}$, et la construction de $\kappa' = \mathtt{122}\ldots$ peut se poursuivre comme celle de κ.

Question 30 • Il est clair que $\kappa' = \mathtt{1}\kappa$ puisqu'après la première étape, ce que l'on ajoute après le $\mathtt{1}$ initial pour contruire κ' est exactement ce qui sert à construire κ.

Question 31 • κ est point fixe de Φ, donc $\Phi^n(\kappa)$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le résultat de la question 28 montre que κ n'est pas ultimement stérile, donc n'est pas ultimement périodique.

Question 32 • Remarquons que si $u \in 2\Sigma^*$, alors $|\mu(u)| > |u|$. Ainsi, on aura $|\mu^d(2)| \geqslant n$ pour d assez grand. On obtient donc κ_n en prenant la n-ième lettre de $\mu^d(2)$, où d est le plus petit exposant d'itération vérifiant $|\mu^d(2)| \geqslant n$.

```
let kappa n =
 let rec aux = function
  | u when list_length u < n -> aux (mere u)
  | u -> u
 in (vect_of_list (aux [D])).(n-1) ;;
```

Question 33 • La formule traduit simplement le fait que le bloc j est le père de κ_j si j est pair, la mère de κ_j si j est impair.

Question 34 • `dmap` réalise l'application d'un morphisme alternant à une liste ; `pi` et `mu` calculent le père et la mère d'une lettre ; `flat` met à plat une liste de listes.

```
let rec dmap (f,g) = function
 | [] -> []
 | t::q  -> (f t)::(dmap (g,f) q) ;;

let mu = function
 | U -> [D]
 | D -> [D;D]
and pi = function
 | U -> [U]
 | D -> [U;U] ;;

let flat = it_list (prefix @) [] ;;

let kappa n =
 let rec aux = function
  | u when list_length u<n -> aux (flat(dmap (mu,pi) u))
  | u -> (vect_of_list u).(n-1)
 in aux [D] ;;
```

Références bibliographiques

▶ Le mot de Kolakoski trouve son origine dans le problème 5304, *Self generating runs*, Amer. Math. Montly **72**, 674, 1995.

▶ La génération de κ avec un morphisme alternant a été proposée par Karel Čulik II, Juhani Karhumäki et Arto Lepistö.

▶ La preuve de l'ultime périodicité de κ a été donnée par Dekking au *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* (1979-1980, exposé n° 9). Arto Lepistö et Arturo Carpi ont montré (indépendamment l'un de l'autre) en 1993 que κ ne contenait pas de facteur cubique (de la forme uuu avec $u \neq \varepsilon$) et que les seuls facteurs carrés avaient pour longueur 2, 4, 6, 18 et 54.

▶ On ne sait à peu près rien d'autre concernant κ ; voici une liste de quelques questions ouvertes :

- notons $C_\kappa(n)$ le nombre de facteurs de κ de longueur n ; ainsi, $C_\kappa(1) = 2$, $C_\kappa(2) = 4$, $C_\kappa(3) = 6$. Quel est le comportement asymptotique de $C_\kappa(n)$?
- un facteur de κ est *récurrent* s'il possède une infinité d'occurrences ; il est facile de voir que les facteurs de κ de longueur au plus 3 sont récurrent. Est-ce le cas de tous les facteurs de κ ?
- notons $f_1(n)$ la fréquence de la lettre `1` dans le préfixe de longueur n de κ :

$$f_1(n) = \frac{\big|\kappa[1..n]\big|_1}{n}$$

La suite de terme général $f_1(n)$ possède-t-elle une limite ?

FIN